

Examen final.*Durée : 2 heures.*

Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1. *Questions de cours.* Donner les énoncés des résultats ou les définitions suivants. On ne demande pas les démonstrations.

- 1) Donner la définition de suites adjacentes (de réels).
- 2) a) Donner le résultat caractérisant les réels possédant un développement périodique.
b) Est-ce que $0,1010010001000010000010000001\dots$ est un rationnel ? Pourquoi ?
- 3) Quel théorème traduit le fait que $\mathbb{R}$ est complet ?
- 4) Enoncer le théorème fondamental du calcul.

Exercice 2. Les questions 1), 2) et 3) sont totalement indépendantes. On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

- 1) a) Simplifier $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.
b) En déduire l'existence de deux irrationnels a et b tels que a^b soit un rationnel.
- 2) On veut démontrer par l'absurde que $\sqrt[3]{4}$ est irrationnel. On suppose donc qu'il existe des entiers a et b supérieurs à 1 tels que $a \wedge b = 1$ et $\sqrt[3]{4} = a/b$.
 - a) Justifier que a est pair.
 - b) Prouver que b est aussi pair et conclure.
 - c) Déduire de ce résultat que $\sqrt[3]{2}$ est un irrationnel.
- 3) On veut démontrer par l'absurde que $\sqrt[3]{3}$ est irrationnel. On suppose donc qu'il existe des entiers a et b supérieurs à 1 tels que $a \wedge b = 1$ et $\sqrt[3]{3} = a/b$.
 - a) Donner l'énoncé du lemme d'Euclide.
 - b) Justifier que a est divisible par 3.
 - c) Prouver que b est aussi divisible par 3. Conclure.

Exercice 3. On donne $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ et $\sqrt{5} \approx 2.236$.

- 1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{5+x^2}$. Déterminer les variations de f (on ne demande pas la limite en $+\infty$).

On considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \left\{ \frac{n}{5+n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- 2) a) Déterminer la limite de $\frac{n}{5+n^2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
b) Déterminer alors $\inf A$ en utilisant la caractérisation des bornes inférieures.

- c) Est-ce que A possède un plus petit élément ? Justifier.
- 3) Déterminer $\sup A$ et si A possède un plus grand élément. On justifiera soigneusement.
- 4) Est-ce que l'ensemble $\left\{ \frac{x}{5+x^2}, x \in \mathbb{R}_+ \right\}$ possède un plus petit élément ? un plus grand élément ? Justifier.

Exercice 4.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = 0,11\dots11$, où l'on a écrit n fois le chiffre 1. On note également $y = 0,1111\underline{1}\dots$.
- a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, est-ce que a_n est un nombre décimal ? un nombre rationnel ? Justifier.
- b) Est-ce que y est un nombre rationnel ? Si oui, l'écrire sous forme de fraction irréductible (c'est-à-dire avec numérateur et dénominateur premiers entre eux). Est-ce que y est un nombre décimal ? Justifier.
- c) Calculer $y - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire pour la suite $(a_n)_{n \geq 1}$?

On considère l'ensemble A des nombres décimaux x tels que $0 \leq x < 1$ et dont chaque décimale est 0 ou 1, autrement dit, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $x = 0, x^1 x^2 x^3 \dots x^n$ avec $x^j \in \{0, 1\}$ quel que soit $1 \leq j \leq n$.

- 2) a) Donner 4 éléments distincts de A .
- b) L'ensemble A admet-il un plus petit élément ? une borne inférieure ? On justifiera soigneusement.
- 3) a) Proposer un candidat pour être $\sup A$.
- b) Justifier que ce candidat est effectivement $\sup A$ en utilisant la caractérisation des bornes supérieures.

Exercice 5. On se donne $y > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et on considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2 y, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - yx_n$.

- 1) a) Exprimer très simplement, pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n .
- b) Donner une expression simple de u_1 , u_2 et u_3 en fonction de u_0 .
- c) En déduire, à l'aide d'une récurrence, une expression simple de u_n en fonction de n et de u_0 .
- 2) On suppose $0 < x_0 < 2/y$.
- a) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Justifier.
- b) La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Justifier.
- 3) On suppose $x_0 > 2/y$.
- a) La suite $(|u_n|)_{n \geq 0}$ admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Justifier.
- b) La suite $(|x_n|)_{n \geq 0}$ admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Justifier.
- c) La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ admet-elle une limite ? Si oui, laquelle ? Justifier.