

Classification des surfaces compactes

Schmitt Danny

Mardi 28 Mai 2013

Table des matières

1	Le groupe fondamental	3
1.1	Définition du groupe fondamental	3
1.2	Quelques propriétés	4
1.3	Groupe fondamental des sphères S^n	5
1.4	Exemples d'applications	5
2	Le théorème de Van Kampen	7
2.1	Produit libre	7
2.2	Le théorème de Van Kampen	7
2.3	Exemple	8
3	Construction des surfaces compactes	9
3.1	Somme connexe et orientation sur les surfaces	9
3.2	Les surfaces orientables	9
3.3	Les surfaces non orientables	11
3.4	Comparaison	12
4	Classification des surfaces	13
4.1	Fonction de Morse	13
4.2	Réduction de la fonction de Morse	15
4.3	Fin de la preuve	16

Le sujet de ce mémoire est la classification des surfaces compactes. La première partie calculera le groupe fondamental des différentes surfaces à l'aide du théorème de Van Kampen et montrera qu'elles ne sont pas homéomorphes. On donnera ensuite les étapes de la preuve du théorème de classification des surfaces compactes, en suivant la méthode détaillée dans le livre *Topologie des surfaces* d'André Gramain [1]. Le groupe fondamental et le théorème de Van Kampen sont également présentés dans les deux premiers chapitres de *Topologie des surfaces*, ainsi que dans le premier chapitre du livre *Algebraic topology* d'Allen Hatcher [2] de manière plus approfondie.

Chapitre 1

Le groupe fondamental

1.1 Définition du groupe fondamental

Soit X un espace topologique. On appelle chemin une application $\gamma : I \rightarrow X$ continue, où $I = [0, 1]$. Le point $\gamma(0)$ est l'origine du chemin et $\gamma(1)$ son extrémité. Un lacet est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

Si γ_1 est un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x_1 , et γ_2 d'origine x_1 et d'extrémité x_2 , on peut définir le chemin composé $\gamma_1\gamma_2$ d'origine x_0 et d'extrémité x_2 parcourant γ_1 puis γ_2 :

$$\gamma_0\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{si } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ \gamma_1(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Cette opération n'est pas associative, car si on compose plusieurs chemins successivement, certains seront parcourus plus rapidement que d'autres. Pour obtenir de meilleures propriétés sur les chemins, on va s'autoriser à les déformer de manière continue. Si X et Y sont des espaces topologiques, une homotopie entre deux applications continues $f_0, f_1 : Y \rightarrow X$ est une fonction continue

$$\begin{aligned} F : Y \times I &\longrightarrow X \\ (y, s) &\longmapsto F_s(y) \end{aligned}$$

telle que $F_0 = f_0$ et $F_1 = f_1$. On dit alors que f_0 et f_1 sont homotopes.

En ce qui concerne l'homotopie de deux chemins γ_0 et γ_1 , on demandera en plus qu'ils soient homotopes relativement à $\{0, 1\}$, c'est à dire qu'ils aient même origine x_0 et même extrémité x_1 et que l'homotopie $F : I \times I \rightarrow X$ soit telle que $F_0 = \gamma_0$, $F_1 = \gamma_1$ et $\forall s \in I$, $F_s(0) = x_0$ et $F_s(1) = x_1$.

On notera $\gamma_0 \sim \gamma_1$. On voit facilement que la relation d'homotopie de chemins est une relation d'équivalence. On note $[\gamma]$ la classe d'homotopie d'un chemin γ .

Etant donné un point $x_0 \in X$, deux lacets en x_0 peuvent toujours être composés, et leur composé est aussi un lacet en x_0 . On définit alors le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ par le quotient de l'ensemble des lacets en x_0 modulo la relation d'homotopie.

Proposition 1.1. *La composition de chemin induit une loi de groupe sur $\pi_1(X, x_0)$.*

Il suffit de démontrer plus généralement pour des chemins non nécessairement des lacets que :

Proposition 1.2. – *La relation d'homotopie est compatible avec la composition de chemins*

$$\gamma_0 \sim \gamma'_0 \text{ et } \gamma_1 \sim \gamma'_1 \Rightarrow \gamma_0 \gamma_1 \sim \gamma'_0 \gamma'_1$$

– *La composition de chemin est associative à homotopie près*

$$\gamma_0(\gamma_1 \gamma_2) \sim (\gamma_0 \gamma_1) \gamma_2$$

– *Si on note η_x le chemin constant en x ,*

$$\eta_{x_0} \gamma \sim \gamma \sim \gamma \eta_{x_1}$$

– *Si on note $\bar{\gamma}(t)$ le chemin $\gamma(1-t)$,*

$$\gamma \bar{\gamma} \sim \eta_{x_0} \text{ et } \bar{\gamma} \gamma \sim \eta_{x_1}$$

Si x_0 et x_1 sont dans la même composante connexe par arcs, alors $\pi_1(X; x_0)$ et $\pi_1(X; x_1)$ sont isomorphes. En effet, si γ_0 est un chemin reliant x_0 à x_1 , l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\longmapsto [\bar{\gamma}_0 \gamma \gamma_0] \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe d'après les propriétés précédentes, et son inverse est

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \pi_1(X, x_1) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] &\longmapsto [\gamma_0 \gamma \bar{\gamma}_0] \end{aligned}$$

Si X est connexe par arcs et que l'on s'intéresse seulement à la classe d'isomorphisme de son groupe fondamental, on note simplement $\pi_1(X)$.

On dit que X est simplement connexe si son groupe fondamental est réduit à un élément, c'est à dire que tout lacet est homotope au lacet constant. Ceci équivaut à dire que deux chemins sont homotopes si et seulement si ils ont même origine et même extrémité.

Par exemple tout sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé est simplement connexe (avec l'homotopie $(1-s)\gamma + s\eta_{x_0}$).

1.2 Quelques propriétés

Soit X et Y deux espaces topologiques. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une fonction continue, alors pour tout chemin γ de X , $f \circ \gamma$ est un chemin de Y . On a trivialement $f \circ (\gamma_0 \gamma_1) = (f \circ \gamma_0)(f \circ \gamma_1)$, et si γ_0 et γ_1 sont homotopes, on montre facilement que $f \circ \gamma_0$ et $f \circ \gamma_1$ sont homotopes.

Proposition 1.3. *Pour $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0) \in Y$, l'application :*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. De plus, $(f \circ g)_ = f_* \circ g_*$, et $Id_* = Id$.*

Une conséquence est que si f est un homéomorphisme, alors f_* est un isomorphisme. Plus généralement, on dit que $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe un inverse $g : Y \rightarrow X$ à homotopie près, c'est à dire que $f \circ g$ est homotope à Id_Y et $g \circ f$ est homotope à Id_X . On dit que X et Y ont le même type d'homotopie, ou sont homéotopes, s'il existe une équivalence d'homotopie. Cette relation est une relation d'équivalence.

Proposition 1.4. *Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ est un isomorphisme.*

Le groupe fondamental est donc un invariant du type d'homotopie. La propriété suivante permet de calculer facilement le groupe fondamental d'un produit cartésien :

Proposition 1.5. *$\pi_1(X \times Y)$ est isomorphe à $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

Cela ce déduit très simplement du fait que se donner une application continue à valeurs dans $X \times Y$ équivaut à se donner deux applications continues à valeurs dans X et dans Y .

1.3 Groupe fondamental des sphères S^n

Proposition 1.6. *Le groupe fondamental du cercle $\pi_1(S^1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

On veut caractériser la classe d'un lacet du cercle par le nombre de tours qu'il effectue. Pour un lacet différentiable $\varphi : I \rightarrow S^1$, on peut définir le degré d'un lacet $d(\varphi) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{d\varphi}{\varphi}$ en identifiant S^1 aux complexes de module 1. En posant $\theta(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^t \frac{d\varphi}{\varphi}$, on montre en comparant les dérivés que $\varphi(t) = e^{2i\pi\theta(t)}$. Cela prouve que $d(\varphi)$ est bien un entier, et qu'il correspond à l'idée du nombre de tours que le lacet parcourt. On finit la démonstration en montrant que toutes les classes d'homotopie contiennent un lacet différentiable et que le degré ainsi défini est bien un isomorphisme.

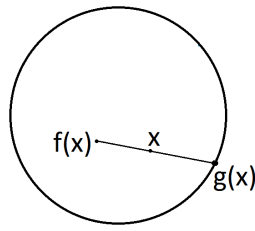
Proposition 1.7. *Pour $n \geq 2$, $\pi_1(S^n) = 0$.*

On commence par remarquer avec la projection stéréographique que la sphère S^n privée d'un point est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc simplement connexe. Tout lacet non surjectif est donc homotope au lacet constant. Si le lacet est surjectif, on construit un lacet homotope non surjectif en le faisant contourner un point quelconque de la sphère.

1.4 Exemples d'applications

Théorème 1.1 (point fixe de Brouwer). *Toute fonction continue $f : D^2 \rightarrow D^2$ possède un point fixe.*

Par l'absurde, on suppose que l'on ait $f : D^2 \rightarrow D^2$ continue sans point fixe. On construit alors $g : D^2 \rightarrow S^1$ en définissant $g(x)$ comme l'intersection de la demi-droite $[f(x), x]$ avec le cercle unité. On montre qu'il s'agit d'une équivalence d'homotopie. On obtient alors une contradiction puisque D^2 et S^1 n'ont pas le même groupe fondamental.



On peut démontrer le théorème de Borsuk-Ulam en utilisant le groupe fondamental dans le cas où $n = 2$:

Théorème 1.2 (Borsuk-Ulam). *Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue. Il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Chapitre 2

Le théorème de Van Kampen

Le théorème de Van Kampen permet de calculer le groupe fondamental d'un espace topologique en le décomposant en plusieurs sous ensembles dont on sait calculer le groupe fondamental. L'idée est de décomposer un lacet de l'espace entier en un composé de plusieurs lacets contenus dans les sous-parties considérées. On commence par introduire le produit libre de groupes pour décrire toutes les combinaisons possibles, et le théorème précisera comment éliminer les doublons.

2.1 Produit libre

On se donne une famille de groupes (G_α) , et on considère l'ensemble des mots finis constitués d'éléments de $\bigsqcup_\alpha G_\alpha$. On simplifie alors les mots avec les deux opérations suivantes :

- remplacer deux lettres consecutives g_1 et g_2 appartenant à un même groupe G_α par la lettre g_1g_2
- supprimer les éléments neutres

L'ensemble des mots réduits est constitué du mot vide et des mots $g_1g_2 \dots g_n$ sans élément neutre, tels que deux lettres consecutives $g_i \in G_{\alpha_i}$ et $g_{i+1} \in G_{\alpha_{i+1}}$ appartiennent à des groupes différents ($\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$). On vérifie alors que chaque mot admet une unique forme réduite. Le produit libre des groupes (G_α) , noté $*G_\alpha$, est l'ensemble des mots réduits avec pour loi de groupe celle induite par la concatenation, c'est à dire si $\omega_1 = g_1g_2 \dots g_n$ et $\omega_2 = h_1h_2 \dots h_m$, $\omega_1\omega_2$ est le mot réduit obtenu après simplification de $g_1g_2 \dots g_nh_1h_2 \dots h_m$.

Le groupe $*G_\alpha$ est caractérisé par la propriété universelle suivante : se donner un morphisme de groupe $\phi : *G_\alpha \rightarrow H$ équivaut à se donner une famille de morphismes $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$, avec la formule $\phi(g_1 \dots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \dots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$ pour $g_1 \dots g_n \in *G_\alpha$ tel que $g_i \in G_{\alpha_i}$.

2.2 Le théorème de Van Kampen

Théorème 2.1 (de Van Kampen). *Soit $X = A_1 \cup A_2$ un espace topologique, avec A_1 et A_2 ouverts connexes par arcs, et soit $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Les morphismes*

$\varphi_i : \pi_1(A_i, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ induits par les inclusions s'étendent en un morphisme

$$\phi : \pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

Si $A_1 \cap A_2$ est connexe par arcs, ϕ est surjective et son noyau est le sous-groupe distingué engendré par les $j_{1,2}(\omega)j_{2,1}(\omega)^{-1}$ pour $\omega \in A_1 \cap A_2$, où les $j_{1,2} : \pi_1(A_1 \cap A_2, x_0) \rightarrow \pi_1(A_1, x_0)$ sont les morphismes induits par les inclusions $A_1 \cap A_2 \subset A_1$.

Pour démontrer la surjectivité, on décompose un lacet f en x_0 de X en lacets de A_1 et A_2 . Les $f^{-1}(A_i)$ forment un recouvrement ouvert de I , leur composantes connexes forment un recouvrement de I par des intervalles. Par compacité, on peut recouvrir I par un nombre fini d'intervalles $[s_k, s_{k+1}]$ dont l'image est contenu successivement dans A_1 puis dans A_2 . On a donc décomposé f en un composé de chemins $f_k = f|_{[s_k, s_{k+1}]}$. On utilise ensuite la connexité par arcs de $A_1 \cap A_2$ pour relier chaque $f(s_k)$ à x_0 par un chemin h_k . Les $\bar{h}_k f_k h_{k+1}$ sont alors des lacets en x_0 contenu successivement dans A_1 ou A_2 et leur composé est homotope à f , ce qui montre que $[f]$ est dans l'image de ϕ .

Le théorème de Van Kampen peut se généraliser pour un recouvrement de X par une famille d'ouverts.

2.3 Exemple

On utilisera souvent le théorème de Van Kampen sur des ensembles A_1 et A_2 possédant des voisinages ouverts U_1 et U_2 tels que les inclusions $A_i \subset U_i$ et $A_1 \cap A_2 \subset U_1 \cap U_2$ soient des équivalences d'homotopies.

On peut retrouver la simple connexité de la sphère S^n pour $n \geq 2$ en l'écrivant comme la réunion de deux hémisphères, homéomorphes au disque D^n donc simplement connexes, lesquels s'intersectent sur la sphère S^{n-1} connexe par arcs. Le théorème de Van Kampen permet de conclure.

Chapitre 3

Construction des surfaces compactes

3.1 Somme connexe et orientation sur les surfaces

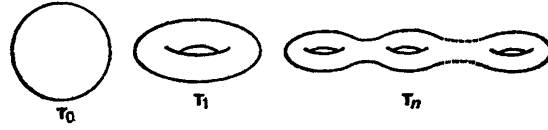
Etant données deux variétés V et V' connexes de dimension n , leur somme connexe $V \# V'$ est l'espace obtenu en retirant une boule D à V et D' à V' , puis en recollant $V \setminus \text{int}(D)$ et $V' \setminus \text{int}(D')$ suivant un homéomorphisme entre leurs bords homéomorphes à S^{n-1} . On peut montrer que l'espace $V \# V'$ obtenu est une variété de dimension n bien définie à homéomorphisme près. Elle est connexe, sauf dans le cas où V et V' sont homéomorphes à $\mathbb{R}$.

La somme connexe est commutative et associative, et $V \# S^n \cong V$. Si $n \geq 3$, S^{n-1} est simplement connexe, on obtient alors à l'aide du théorème de Van Kampen que $\pi_1(V \# V') = \pi_1(V) * \pi_1(V')$.

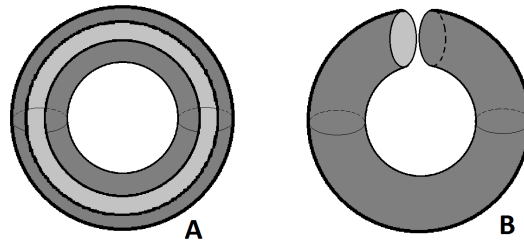
On dit qu'une surface M est orientable si on peut choisir une orientation sur chaque espace tangent de manière continue, c'est à dire que pour tout champ de vecteurs continu X et Y , si $X(m)$ et $Y(m)$ forment une base de $T_m M$ orienté positivement, c'est encore le cas pour $X(m')$ et $Y(m')$ dans voisinage de m . Le ruban de Moebius n'est pas orientable, et toute surface contenant une partie homéomorphe au ruban de Moebius est non orientable. On peut montrer que les surfaces orientables se plongent dans $\mathbb{R}^3$, et que les surfaces non orientables se plongent dans $\mathbb{R}^4$, mais pas dans $\mathbb{R}^3$.

3.2 Les surfaces orientables

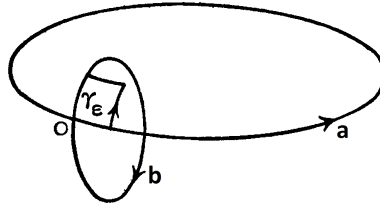
Notons T_1 le tore $S^1 \times S^1$. C'est une surface compacte dont le groupe fondamental est $\pi_1(T_1) = \mathbb{Z}^2$ d'après la proposition 1.5. On définit par récurrence la surface $T_{n+1} = T_n \# T_1$ (On peut définir T_0 comme la sphère S^2). On appelle T_n la surface orientée de genre n .



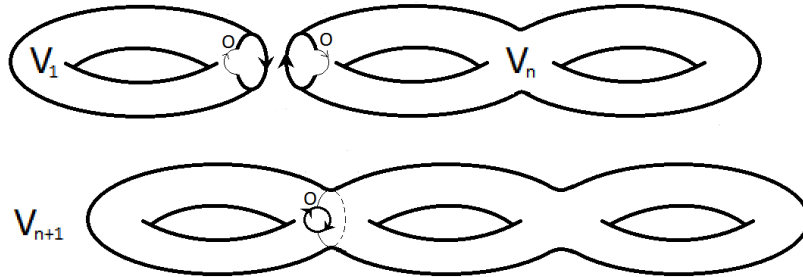
Nous allons calculer par récurrence les groupes fondamentaux des T_n . Notons V_1 l'espace obtenu en enlevant un carré à T_1 . On peut écrire V_1 comme l'union de deux cylindres courbés A et B , chacun défini par un produit de la forme $S^1 \times J$ avec J un arc de cercle. Leurs groupes fondamentaux sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. Leur intersection est un rectangle $J \times J$ simplement connexe. Le théorème de Van Kampen nous donne $\pi_1(V_1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.



En choisissant le point de base O sur un coin du carré, soit a la classe dans V_1 d'un lacet parcourant une fois $S^1 \times \{0\}$ dans la direction indiquée par un côté, b la classe d'un qui parcourt $\{0\} \times S^1$, et soit γ le lacet parcourant le bord du carré. a et b sont des générateurs de $\pi_1(V_1)$, et la classe de γ dans V_1 est $aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$ le commutateur de a et b .



Notons V_n l'espace obtenu en enlevant un disque à T_n et supposons par récurrence que $\pi_1(V_n)$ soit le groupe libre à $2n$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$, et que la classe du bord de V_n soit $[a_1, b_1] \dots [a_n, b_n]$. On peut obtenir V_{n+1} en recollant V_1 et V_n sur une portion de cercle simplement connexe de leurs bords.

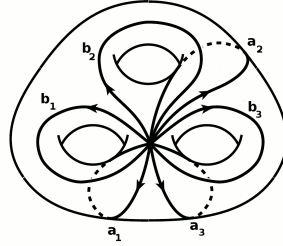


Le théorème de Van Kampen nous dit que $\pi_1(V_{n+1})$ est un groupe libre à $2n + 2$ générateurs $a_1, b_2, \dots, a_n, b_n$ (donnés par $\pi_1(V_n)$) et a_{n+1}, b_{n+1} (donnés par $\pi_1(V_1)$).

On choisit le point de base O à la fois sur le bord de V_{n+1} et sur la zone de recollement de V_1 et V_n . Le bord de V_{n+1} peut s'écrire comme le composé du bord de V_n , de classe $[a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$, et du bord de V_1 de classe $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, ce qui achève la récurrence.

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Van Kampen sur $T_n = V_n \cup D^2$ pour obtenir le groupe fondamental de T_n .

Proposition 3.1. *Le groupe fondamental de T_n est le quotient du groupe libre à $2n$ générateurs $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ par le sous groupe distingué engendré par $[a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$.*



3.3 Les surfaces non orientables

Le plan projectif réel $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ peut être obtenu comme l'espace quotient de la sphère S^2 par la relation qui identifie les paires de points antipodaux. La surjection canonique $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ est continue, et localement un homéomorphisme. $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ est une surface compacte.

On peut décomposer la sphère S^2 en deux petits disques opposés D_1 et D_2 plus une couronne C , s'intersectant en deux cercles disjoints. L'image sur $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ de $D_1 \cup D_2$ est un disque D , et la couronne C devient un ruban de Moebius M . On a donc $\mathbb{P}^2\mathbb{R} = M \cup D$ avec $M \cap D$ leur bord commun, un cercle faisant deux fois le tour du ruban de Moebius. Le théorème de Van Kampen donne alors le groupe fondamental du plan projectif réel :

Proposition 3.2. $\pi_1(\mathbb{P}^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

On définit $U_1 = \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ et par récurrence $U_{n+1} = U_n \# U_1$. Les surfaces U_n contiennent une partie homéomorphe au ruban de Moebius, elle ne sont donc pas orientables. On appelle U_n la surface non orientée de genre n .

D'après le paragraphe précédent, si a est un générateur de $\pi_1(M)$, la classe du bord γ_1 de M est a^2 . U_2 est obtenu en recollant deux rubans de Moebius M_1 et M_2 le long de leurs bords, c'est la bouteille de Klein. La classe du lacet $M_1 \cap M_2$ est a_1^2 dans M_1 et a_2^{-2} dans M_2 . D'après le théorème de Van Kampen, $\pi_1(U_2)$ est le quotient du groupe libre à deux générateurs a_1, a_2 par le sous groupe distingué engendré par $a_1^2 a_2^2$.

Proposition 3.3. $\pi_1(U_n)$ est le quotient du groupe libre à n générateurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ par le sous groupe distingué engendré par $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2$.

On procède de la même façon que pour les surfaces T_n . Notons W_n l'espace U_n privé d'un petit disque ouvert. W_1 est un ruban de Moebius, de groupe fondamental $\mathbb{Z}$. On construit W_n en recollant W_{n-1} et un ruban de Moebius M le long d'un arc de cercle. On a donc $\pi_1(W_n) = \pi_1(W_{n-1}) * \pi_1(M)$ et par récurrence $\pi_1(W_n)$ est le groupe libre à n générateurs $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Le bord γ_n de W_n se décompose en $\gamma_{n-1}\gamma'_1$, γ'_1 de classe a_n^2 dans M . Par récurrence, la classe de γ_n dans W_n est $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2$. On conclut en utilisant le théorème de Van Kampen sur $U_n = W_n \cup D$.

3.4 Comparaison

On va maintenant se servir des groupes fondamentaux calculés pour démontrer cette proposition :

Théorème 3.1. *Aucune des surfaces T_n ($n \geq 0$) et U_n ($n \geq 1$) n'ont le même type d'homotopie.*

Il suffit de démontrer que leurs groupes fondamentaux respectifs ne sont pas isomorphes. Pour le voir, on rend les groupes fondamentaux abélien en faisant le quotient par le sous-groupe engendré par tous les commutateurs.

Le groupe fondamental $\pi_1(T_n)$ est le quotient du groupe libre à $2n$ générateurs par le sous-groupe distingué engendré par un certain produit de commutateur. En le rendant abélien, on trouve l'abélianisé de $\mathbb{Z}^{*2n}$, qui est $\mathbb{Z}^{2n}$.

Le groupe fondamental $\pi_1(U_n)$ est le quotient du groupe libre à n générateurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ par le sous-groupe distingué engendré par $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2$. En le rendant abélien, on trouve $\mathbb{Z}^n / (2, 2, \dots, 2)$. On montre alors que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^{n-1}$. Le théorème de la base adaptée affirme l'existence d'une base de $\mathbb{Z}^n$ dans laquelle le sous-groupe N engendré par $(2, 2, \dots, 2)$ est engendré par des multiples des éléments de la base. On construit sans difficulté une telle base en prenant (e_i) la base canonique et en posant $f_1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et $f_i = e_i$ pour $i \geq 2$. (f_i) est une base de $\mathbb{Z}^n$ et N est engendré par $2f_1$. On a donc $\mathbb{Z}^n / (2, 2, \dots, 2) \cong \mathbb{Z}^n / (2\mathbb{Z} \times \{0\}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^{n-1}$.

Les groupes $\mathbb{Z}^{2n}$ et $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ n'étant pas isomorphes, les groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes.

Chapitre 4

Classification des surfaces

Ce chapitre va donner les étapes de la preuve du théorème suivant :

Théorème 4.1. *Toute variété différentiable compacte connexe M de dimension 2 est homéomorphe à un espace T_n ou U_n .*

Si M est une variété compacte de dimension n , ses composantes connexes sont en nombre fini, et sont des variétés compactes (et connexes) de dimension n . La classification des surfaces compactes connexes suffit donc à classer toutes les surfaces compactes.

On admet le résultat de classification des variétés compactes connexes de dimension 1, qui s'obtient par une méthode similaire à celle qui va être décrite.

Théorème 4.2. *Si M est une variété compacte connexe de dimension 1, M est homéomorphe au cercle S^1 .*

4.1 Fonction de Morse

Soit M une surface compacte connexe et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r ($r \geq 3$). On dit que $c \in M$ est un point critique si $Df(c) = 0$. Si un des antécédants $f^{-1}(a)$ d'un réel a est un point critique, on dit que a est une valeur critique de f ; sinon, on dit que a est une valeur régulière.

Si c est un point critique, on peut définir la différentielle seconde de f en c , $D^2f(c)$. On dit que c est non dégénéré si la forme quadratique associée à $D^2f(c)$ est non dégénérée. L'indice d'un point critique est la dimension du plus grand sous-espace sur lequel la forme quadratique associée à $D^2f(c)$ est définie négative.

Une fonction de Morse est une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r ($r \geq 3$) dont tous les points critiques sont non dégénérés, et dont les valeurs critiques correspondantes sont tous distinctes.

On peut démontrer que les points critiques non dégénérés sont isolés. Il résulte de la compacité de M que les points critiques de f sont en nombre fini. On admettra un premier théorème d'existence des fonctions de Morse :

Théorème 4.3 (Sard). *Soit M une surface compacte et $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction de Morse C^∞ $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f - g\| < \epsilon$.*

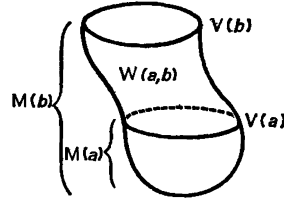
Une fonction de Morse peut être vue comme une “altitude” sur la surface M . Le théorème de Morse permet de décrire l’allure de la fonction au voisinage d’un point critique non dégénéré en fonction de son indice.

Théorème 4.4 (Morse). *Soit c un point critique non dégénéré de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r ($r \geq 3$). Il existe un paramétrage φ d’un voisinage de c tel que*

$$f(\varphi(X, Y)) = f(c) + \begin{cases} X^2 + Y^2 & \text{si } c \text{ est d'indice } 0 \\ X^2 - Y^2 & \text{si } c \text{ est d'indice } 1 \\ -X^2 - Y^2 & \text{si } c \text{ est d'indice } 2 \end{cases}$$

On reconstruit la surface M en augmentant progressivement l’altitude. Soit $M_a = f^{-1}(]-\infty; a])$ la surface sous l’altitude a , $V_a = f^{-1}(a)$ la courbe de niveaux, $M'_a = f^{-1}([a, +\infty[)$ et $W(a, b) = f^{-1}([a, b])$. Si a est une valeur régulière, alors V_a est une variété compacte de dimension 1, et donc une union disjointe d’un nombre fini de courbes fermés homéomorphes au cercle.

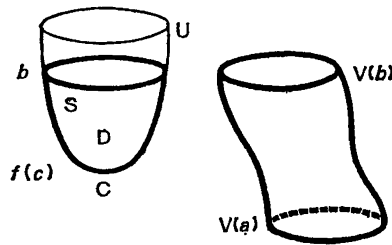
Proposition 4.1. *Si f n’a pas de valeur critique dans $[a, b]$, alors M_a est difféomorphe à M_b , V_a est difféomorphe à V_b et $W(a, b)$ est difféomorphe à $V_a \times [a, b]$.*



On démontre la proposition en construisant un champ de vecteur sur M perpendiculaire aux courbes de niveaux, normalisé à l’aide de Df de sorte que lorsque on suit le flot du champ de vecteur assez loin des points critiques, on augmente d’altitude à vitesse constante.

On va maintenant regarder ce qu’il se passe lorsque l’on franchit une valeur critique. Supposons que $f(c)$ est la seule valeur critique dans $[a, b]$. Il y a plusieurs cas suivant l’indice de c :

Proposition 4.2. *Si c est d’indice 0, M_b est difféomorphe à l’union disjointe de M_a et d’un disque. V_b est difféomorphe à l’union disjointe de V_a et d’un cercle.*

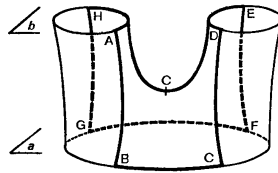


Le nombre de composantes connexes de la courbe de niveau augmente d’un. On obtient une proposition symétrique si c est d’indice 2 :

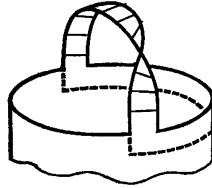
Proposition 4.3. *Si c est d'indice 2, M_b est homéomorphe à l'espace obtenu en collant un disque à M_a le long d'une des composantes circulaires de V_a . V_b est difféomorphe à V_a privé de cette composante.*

Proposition 4.4. *Si c est d'indice 1, M_b est homéomorphe à un espace obtenu en collant un rectangle à M_a par deux de ses côtés opposés le long de deux segments disjoints de V_a . Le résultat dépend de la manière dont le rectangle est attaché. Il y a trois cas de figure :*

- Les deux côtés du rectangle sont attachés à des composantes différentes de V_a . Dans ce cas, V_b possède une composante connexe de moins que V_a .
- Les deux côtés du rectangle sont attachés à la même composante de V_a , et dans la même orientation. Dans ce cas, V_b possède une composante connexe de plus que V_a .



- Les deux côtés du rectangle sont attachés à la même composante de V_a mais dans des orientations opposées. V_b a le même nombre de composante connexe que V_a .

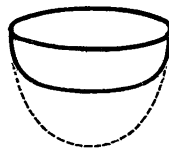


Dans les deux premiers cas, on dit que c est du type I, et du type II dans le troisième cas. Si f admet un point critique du type II, M contient une partie homéomorphe au ruban de Moebius, et n'est donc pas orientable.

4.2 Réduction de la fonction de Morse

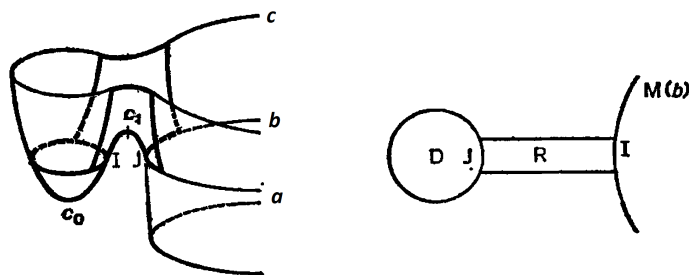
On peut montrer qu'en modifiant la fonction f au voisinage d'un point critique c , on peut construire une fonction de Morse g ayant les mêmes points critiques que f et les mêmes indices, identique à f en dehors du voisinage de c et changeant la valeur critique $f(c)$ de sorte que :

- Si c est d'indice 0, on peut choisir $g(c)$ arbitrairement inférieur à $f(c)$
- Si c est d'indice 2, on peut choisir $g(c)$ arbitrairement supérieur à $f(c)$
- Si c est d'indice 1, a un niveau supérieur aux points critiques d'indice 0 et b un niveau inférieur aux points critiques d'indice 2, on peut choisir $g(c) \in]a, b[$.



On se ramène alors à une fonction de Morse ordonnée, c'est-à-dire que les indices des points critiques sont rangés dans l'ordre croissant par rapport à leurs valeurs critiques.

Si c_0 et c_1 sont deux points critiques consécutifs d'indices respectifs 0 et 1, soit a, b et c des niveaux tels que $a < f(c_0) < b < f(c_1) < c$, et de sorte qu'il n'y ait pas d'autre valeur critique entre a et c . M_b s'obtient de M_a en ajoutant un disque D . On dit que c_0 et c_1 sont en bonne position si M_c s'obtient de M_b en recollant un rectangle entre le bord de D et une autre composante de V_b .



Proposition 4.5. *Si c_0 et c_1 sont en bonne position, M_c est homéomorphe à M_a . De plus, il existe une fonction de Morse g coïncidant avec f en dehors de $W(a, c)$, mais qui n'a plus de valeur critique entre les niveaux a et c .*

Soit n_0 le nombre de points critiques d'indice 0, n_1 celui d'indice 1 et n_2 celui d'indice 2. M étant compacte, f atteint son minimum et son maximum et ces deux points sont des points critiques d'indice 0 et 2. On a donc $n_0 \geq 1$ et $n_2 \geq 1$. Si l'inégalité est stricte, il est possible que deux points critiques en bonne position d'indices 0 et 1 se simplifient, et également deux points critiques d'indices 1 et 2 en appliquant la dernière proposition à $-f$. On montre alors que ceci arrive toujours, quitte à changer l'ordre des points critiques.

Proposition 4.6. *Il existe une fonction de Morse ayant un seul point critique d'indice 0 et un seul point critique d'indice 2.*

On obtient alors une fonction de Morse telle que $n_0 = n_2 = 1$. Si a est un niveau entre la valeur critique d'indice 0 et celles d'indice 1, et b un niveau entre les valeurs critiques d'indice 1 et celle d'indice 2, V_a et V_b n'ont qu'une composante connexe. Les points critiques de type I change le nombre de composante connexe de ± 1 , et ceux de type II ne le change pas. Il y a donc un nombre pair de points critiques de type I.

4.3 Fin de la preuve

On a maintenant suffisamment simplifié la fonction de Morse et décrit la manière dont les points critiques reconstruisent la surface pour pouvoir dénombrer les cas et reconnaître les différentes surfaces.

Proposition 4.7. *Si f n'a pas de point critique d'indice 1, alors M est homéomorphe à la sphère S^2 .*

M_a est homéomorphe à un disque, et on obtient M en recollant un autre disque le long de leurs bords.

Proposition 4.8. *Si f possède q points critiques d'indice 1 tous de type II, alors M est homéomorphe à U_q .*

Si $q = 1$, M_b , qui s'obtient en recollant un rectangle à un disque avec orientations contraires, est homéomorphe au ruban de Moebius. M s'obtient en re-fermant la surface avec un disque, elle est donc homéomorphe à U_1 .

Pour $q \geq 2$, notons d un niveau séparant le premier point critique d'indice 1 des autres. On sait que M_b est homéomorphe au ruban de Moebius, et on a par hypothèse de récurrence que M'_d est homéomorphe à U_{q-1} privé d'un disque. Par recollement, M est homéomorphe à U_q .

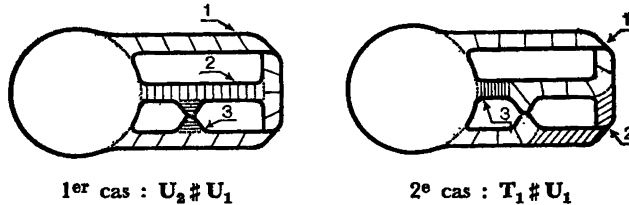
Pour le cas général, on commence par rassembler les points critiques du type I par paire, en changeant astucieusement leurs valeurs critiques, de manière à ce que le premier de la paire augmente le nombre de composante de la courbe de niveau et le deuxième le diminue.

Une telle paire de points critiques peut être constituée de deux manières différentes. Supposons que f n'ait qu'une paire de points critique d'indice 1 du type I, et soit d un niveau entre ces deux points critiques. M_d et M'_d sont tous les deux homéomorphes à un cylindre. Il peuvent se recoller de deux façons : si leurs deux bords circulaires se rattachent avec orientations compatibles, on obtient le tore T_1 ; si ils se rattachent avec orientations non compatibles, on obtient la bouteille de Klein U_2 .

En ordonnant les points de type I de cette manière, la courbe de niveaux est constituée de deux composantes connexes entre les paires de points de type I, et une seule composante connexe entre n'importe quelles autres valeurs critiques. La surface M se décompose alors en une somme connexe successive d'espaces U_1 pour chaque point critique du type II, et d'espaces T_1 ou U_2 pour chaque paire de points du type I.

Proposition 4.9. $T_1 \# U_1 \cong U_3$

On le montre en étudiant le cas où f possède une paire de points du type I suivi d'un point du type II. Suivant que la première paire soit orientable ou non, on obtient soit $T_1 \# U_1$ soit $U_2 \# U_1$. En regardant la manière dont les trois rectangles se rattachent les un aux autres, on montre que les deux espaces M_b , obtenus en retirant un disque aux surfaces, sont homéomorphes.



On peut facilement étendre cette relation par récurrence.

Proposition 4.10. *Pour tout $n \geq 1$ et $p \geq 0$, $T_p \# U_n \cong U_{n+2p}$*

Les sommes connexes d'espaces U_1 , U_2 et T_1 sont donc toutes homéomorphes à un espace T_n ou U_n , ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

- [1] André Gramain. *Topologie des surfaces*. Presses Universitaires de France, Paris, 1971. Collection SUP : “Le Mathématicien”, 7.
- [2] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.