Polynômes symétriques – extensions de corps

I. Polynômes symétriques

Exercice 1. — Exprimer les polynômes symétriques suivants en fonction des polynômes symétriques élémentaires :

a) $X^3+Y^3+Z^3$ ***b)*** $X^2Y+XY^2+X^2Z+XZ^2+Y^2Z+YZ^2$

c) $X^2YZ+XY^2Z+XYZ^2$ ***d)*** X^4+Y^4

Exercice 2. — ***a)*** Soient α,β,γ les trois racines complexes du polynôme $P=X^3+2X^2-2X+5$. Trouver un polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines sont $\alpha^3,\beta^3,\gamma^3$.

b) Soient α,β,γ les trois racines complexes du polynôme X^3+2X^2+X+7. Trouver un polynôme de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines sont $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ et $\beta+\gamma$.

Exercice 3. — Utiliser les formules de Cardan pour trouver les racines des polynômes :

a) X^3+3X+1 ***b)*** X^3-3X ***c)*** X^3+X-2

II. Extensions de corps

Exercice 4. — Soient $k\subset k'\subset k''$ des corps commutatifs.

a) Montrer que si k'' est de dimension finie sur k' et si k' est de dimension finie sur k alors k'' est de dimension finie sur k et qu'on a $\dim_k k''=\dim_k k'\times\dim_{k'} k''$.

b) En déduire qu'il n'existe pas de corps intermédiaire entre $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

c) Montrer que si k est un corps fini, il existe un nombre premier p (sa caractéristique) et un entier positif n tel que $|k|=p^n$.
Montrer que si $k_1\subset k_2$ sont finis, alors ils ont même caractéristique p et il existe des entiers n et m avec n *divisant* m tels que $|k_1|=p^n$ et $|k_2|=p^m$.

Exercice 5. — Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4. Montrer que le polynôme $X^2+1\in(\mathbf{Z}/p)[X]$ est irréductible. Construire ainsi un corps fini à p^2 éléments.
Quel est le lien avec le corps fini $\mathbf{Z}[\imath]/(p)$?

Exercice 6. — Montrer que les nombres complexes suivants sont algébriques (sur $\mathbf{Q}$) et en déterminer un polynôme minimal :

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ***b)*** $e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$ ***c)*** $\sqrt{2}+e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$

Exercice 7. — Montrer que l'on a $\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{2})$. En déduire que $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ appartiennent à $\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ et qu'ils forment une base de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 8. — Trouver un sous-corps de $\mathbf{C}$ dans lequel le polynôme X^3-5 a exactement une racine.

Exercice 9. — Soit k un corps et $P\in k[X]$ un polynôme irréductible. Montrer que l'anneau quotient $K=k[X]/(P)$ est un corps contenant k. Montrer que P admet une racine dans K.
On note n le degré de P. Soit L une extension de k de degré m premier à n. Montrer que $L[X]/(P)$ est de dimension (sur $\mathbf{Q}$) nm. (Commencer par montrer qu'elle est divisible par n et m.) En déduire que P est irréductible sur L.
Application : Montrer que l'on a $\mathbf{Q}[\sqrt{2},\sqrt[3]{5},\sqrt[7]{3}:\mathbf{Q}]=42$.

Exercice 10. — Montrer que le polynôme $X^5+(1+2\imath)X^3+5X^2+5X+2-\imath\in\mathbf{Z}[\imath][X]$ est irréductible. En déduire qu'il est irréductible dans $\mathbf{Q}(\imath)[X]$.