Modules

I. Modules de type fini ; modules libres ; torsion

Exercice 1. — ***a)*** Montrer l'équivalence entre la notion de $\mathbf{Z}$-module et celle de groupe abélien.

b) Montrer qu'un groupe abélien est fini ss'il est de type fini et de torsion.

c) Donner un exemple de groupe abélien infini qui est de type fini (resp. de torsion).

Exercice 2. — Quels sont les sous $\mathbf{Z}$ modules de $\mathbf{Z}$? Vérifier qu'ils sont tous libres. Admettent-ils un supplémentaire dans $\mathbf{Z}$?

Exercice 3. — ***a)*** Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{R}$ n'est pas de type fini.

b) Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}$ n'est pas de type fini.

c) Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}$ n'est pas libre.

d) Montrer que le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est de torsion.

e) Montrer que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est le module de torsion de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Exercice 4. — Soit M un module de type fini et N un sous-module. Montrer que le module quotient M/N est de type fini.

Exercice 5. — Soit $A := C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'anneau des fonctions continues continues $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

a) Montrer que $B := C^0_c(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'anneau des fonctions continues à support compact est un sous A-module de A.

b) Montrer que B n'est pas un A module de type fini (alors que A l'est !).

Exercice 6. — Soit A un anneau.

a) Montrer l'équivalence entre sous A-module de A et idéal de A.

b) Montrer que seuls les idéaux principaux sont libres.

Exercice 7. — Soient k un corps, $n \geqslant 1$ un entier et $A \in \mathrm{M}_n(k)$. On pose $E = k^n$.

a) Vérifier qu'en posant $P(X) \cdot v := P(A)(v)$, on munit E d'une structure de $k[X]$-module. (Ici, $P(A)$ est un polynôme de matrice). On note E_A ce $k[X]$-module.

b) Montrer que E_A est un $k[X]$-module de type fini et de torsion.
[**Indication:** Une matrice admet un polynôme annulateur non nul.]

c) Soit $B \in \mathrm{M}_n(k)$ une autre matrice. Montrer que les $k[X]$-modules E_A et E_B sont isomorphes ssi les matrices A et B sont semblables.

Exercice 8. — Soit $\Gamma \subset \mathbf{Z}^n$ un sous-$\mathbf{Z}$ module (de type fini).

a) Montrer que Γ est sans torsion et donc libre.

b) Montrer qu'une base $v_1, \ldots, v_k$ une base de $\Gamma \subset \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{Q}^n$ est une famille $\mathbf{Q}$-libre au sens de l'algèbre linéaire.

Exercice 9. — Soient m et n deux entiers.

a) Montrer qu'un morphisme de $\mathbf{Z}$-modules $f : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z}^n$ est de la forme $\mathbf{Z}^m \ni X \mapsto M \cdot X \in \mathbf{Z}^n$, pour une unique matrice $M \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbf{Z})$.

b) En déduire que si les $\mathbf{Z}$-modules $\mathbf{Z}^n$ et $\mathbf{Z}^m$ sont isomorphes alors $n = m$.
[**Indication:** On a $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbf{Z}) \subset \mathrm{M}_{n,m}(\mathbf{Q})$; utiliser la théorie de la dimension pour les $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels.]

Exercice 10. — Montrer que les éléments $x_1 = (2, 0)$, $x_2 = (3, 0)$, $x_3 = (0, 5)$ et $x_4 = (0, 4)$ forment une famille génératrice minimale (pour l'inclusion) du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}^2$. Est-ce une base ?

Exercice 11. — Déterminer une base des modules suivants :

a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3,\ x + y + z = 0\}$.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3,\ 3x + 5y + 7z = 0\}$.
[**Indication:** Poser $t = x + 2y$.]

c) $\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2,\ 2x + 3y = 0\}$.

d) $\{(x, y) \in \mathbf{Z}[\imath]^2,\ (1 + \imath)x - (1 - \imath)y = 0\}$.

Exercice 12. — Montrer que les anneaux $\mathbf{Z}[\imath]/(1 + 2\imath)$ et $\mathbf{Z}[\imath]/(1 - 2\imath)$ sont isomorphes. Les $\mathbf{Z}[\imath]$-modules $\mathbf{Z}[\imath]/(1 + 2\imath)$ et $\mathbf{Z}[\imath]/(1 - 2\imath)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 13. — Soient M_1 et M_2 deux modules et $N_1 \subset M_1$ et $N_2 \subset M_2$ des sous-modules.

a) Montrer que le quotient $(M_1 \times M_2)/(N_1 \times N_2)$ est isomorphe à $(M_1/N_1) \times (M_2/N_2)$.

b) On suppose donné un isomorphisme $\varphi : M_1 \cong M_2$. On pose $N_2 := \varphi(N_1)$. Montrer que φ induit un isomorphisme $M_1/N_1 \cong M_2/N_2$.

c) Donner un exemple de modules M_1 et M_2 isomorphes et de sous-modules N_1 et N_2 également isomorphes mais tels que M_1/N_1 et M_2/N_2 ne soient pas isomorphes.

Exercice 14. — Soit M un A-module libre de base $e_1, \ldots, e_n$. Soient $a_{i,j} \in A$ des scalaires. Montrer que les éléments $m_j := \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ $(j = 1 \ldots n)$ forment une base de M ssi $\det(a_{i,j}) \in A^\times$.

II. Modules sur un anneau euclidien

Exercice 15. — Soit A un anneau euclidien pour une fonction $\varphi : A \to \mathbf{N}$ et soit $M \in \mathrm{M}_{n,m}(A)$ une matrice.

a) Rappeler un algorithme qui par une suite d'opérations élémentaires sur ses lignes et ses colonnes mette M sous une forme "diagonale" $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r)$, avec $d_1 |\ d_2 |\ \ldots |\ d_r$.

b) A partir des d_i, comment détermine-t-on (à isomorphisme près) les modules $\operatorname{Im} M$ et $A^n / \operatorname{Im} M$?

c) Appliquer l'algorithme sur les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 45 & 9 \\ 30 & 60 & 90 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 + X^2 & X + 1 \\ (X+1)^2 & X + \imath \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 1 + 2\imath & 10 \\ 4 & 1 + i & 5 \end{bmatrix}$$

d) Soit $f : \mathbf{Z}^5 \to \mathbf{Z}^2$ définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 7x_5\,;\, 4x_1 - 2x_3 + 5x_5)$. Trouver le module quotient $\mathbf{Z}^2 / \operatorname{Im} f$.

Exercice 16. — Soit Γ un sous-module (libre) de $\mathbf{Z}^n$. Montrer que $\mathbf{Z}^n/\Gamma$ est fini ssi Γ est de rang n. Dans ce cas, soit $M \in M_n(\mathbf{Z})$ une matrice dont les colonnes engendrent Γ. Montrer que l'on a $\operatorname{Card}(\mathbf{Z}^n/\Gamma) = |\det M|$.

Exercice 17. — Soit A un anneau et $n \geqslant 1$ un entier. Soit $N \subset A^n$ le sous-module engendré par des vecteurs $v_1, \ldots, v_m \in A^n$. On note $v_{i,j}$ les coordonnées de v_j et M la matrice des $v_{i,j}$.

a) Montrer que le sous-module de A^n engendré par les colonnes de la matrice obtenue après une opération sur les colonnes de M est N.

b) Lorsque A est euclidien, décrire un algorithme pour trouver une famille de vecteurs échelonnés de A^n qui engendrent N. Montrer que cette famille est une base de N.

c) Donner une base des sous-modules suivants :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbf{Z}^2 \qquad \text{et} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbf{Z}^3$$

Exercice 18. — Soit A un anneau euclidien. Exprimer les facteurs invariants d'une matrice carrée $M \in M_2(A)$ à partir du pgcd des coefficients de A et de son déterminant.

Exercice 19. — Soient A un anneau et $M \in \mathrm{M}_{m,n}(A)$ une matrice et $P \in \mathbf{GL}_m(A)$, $Q \in \mathbf{GL}_n(A)$ des matrices inversibles.

a) Montrer que l'on a $\ker P \cdot M = \ker M$.

b) Montrer que l'on a $\ker M \cdot Q = Q^{-1} \ker M$.

c) Déterminer $\ker M$ pour une matrice diagonale.

d) Lorsque A est euclidien, en déduire un algorithme pour résoudre les systèmes d'équations linéaires à coefficients dans A.

e) Montrer que le module quotient $A^m/\ker M$ est toujours libre. Un sous-module $\Gamma \subset A^m$ peut-il toujours se réaliser comme le noyau d'une certaine matrice M ?

f) Trouver une base des modules suivants :

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{Z}^3,\ 2x+3y+5z=0\} \quad \text{et} \quad \{(x,y,z) \in \mathbf{Z}[\imath]^3, (1+\imath)x+(2+\imath)y+5\imath z=0\}$$

Exercice 20. — On reprend les notations de l'exercice *7*.

a) Montrer que le $k[X]$-module E_A est isomorphe au conoyau de $A - X\,\mathrm{id} \in \mathrm{M}_n(k[X])$.

b) En déduire que deux matrices A et $B \in \mathrm{M}_n(k)$ sont semblables ssi les matrices $A - X\,\mathrm{id}$ et $B - X\,\mathrm{id} \in \mathrm{M}_n(k[X])$ ont les mêmes facteurs invariants.

c) Montrer que deux matrices réelles qui sont semblables sur $\mathbf{C}$ sont en fait semblables sur $\mathbf{R}$.

d) Application numérique : Combien y a-t-il de classes de similitude matrices M telles que $\chi_M(X) = X^2(X-1)^3(X+1)$?

Exercice 21. — A isomorphisme près, combien y a-t-il de groupes abéliens finis de cardinal 24 ? Préciser leurs facteurs invariants.

Exercice 22. — Trouver les facteurs invariants des modules suivants :

a) $\mathbf{Z}/3 \times (\mathbf{Z}/9)^2 \times \mathbf{Z}/27 \times (\mathbf{Z}/2)^3 \times \mathbf{Z}/8 \times \mathbf{Z}/125$

b) $\mathbf{Z}[\imath]/(1+\imath) \times \mathbf{Z}[\imath]/(2) \times \mathbf{Z}[\imath]/(1+2\imath) \times \mathbf{Z}[\imath]/(5)$

Exercice 23. — Décomposer en produit de modules indécomposables

a) $\mathbf{Z}[\imath]/(25)$ ***b)*** $\mathbf{Z}[\imath]/(26)$ ***c)*** $(\mathbf{Z}/16)^\times$