La conjecture d'Adams d'après Sullivan

Aurélien DJAMENT

Juin 2002

Mémoire de DEA dirigé par Fabien MOREL

Sullivan inscrit son article *Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture* ([46]) dans le cadre d'un ambitieux programme de compréhension homotopique et géométrique des variétés différentielles. La contribution qu'il apporte à l'aspect homotopique s'inscrit dans la lignée des travaux de Serre dans les années 1950 (cf. [42]) consistant à étudier le type d'homotopie « modulo p » d'un espace topologique, par exemple : Sullivan propose une théorie de la localisation des espaces nilpotents (généralisation du cas antérieurement connu de la localisation des espaces simplement connexes) qui se traduit par une localisation au sens algébrique [1] des foncteurs de topologie algébrique usuelle. A côté de ce « dévissage » des espaces en composantes p-primaires (p parcourant les nombres premiers), Sullivan introduit, à la suite des travaux d'Artin–Mazur ([5]), une notion de complétion profinie homotopique, fournissant elle aussi dans les bons cas au niveau des groupes d'homotopie ou d'homologie la complétion profinie [2] des groupes correspondants pour l'espace initial.

Un des intérêts fondamentaux de cette complétion est de comprendre les liens, pour une variété algébrique complexe, entre la topologie usuelle et la topologie étale, définie de façon purement algébrique : sous des hypothèses assez générales, le type d'homotopie étale coïncide avec le complété profini du type d'homotopie usuel. Ce théorème de comparaison fondamental (établi dans [5]) illustre les aspects aussi bien homotopique que géométrique visé par Sullivan, d'autant qu'il lui sert de manière essentielle à démontrer la conjecture d'Adams, laquelle intervient dans la compréhension du fibré tangent à une variété différentielle. Sullivan établit ce résultat par une description des opérations d'Adams en K–théorie profinie utilisant la topologie étale et une classification des fibrations dont les fibres ont le type d'homotopie d'une sphère localisée ou complétée.

Nous nous proposons dans ce mémoire de présenter de manière détaillée cette démonstration, après avoir introduit des préliminaires généraux (ensembles simpliciaux, décomposition de Postnikov d'un espace nilpotent...) puis, dans leurs grandes lignes, les outils nécessaires en géométrie et en topologie : comparaison des cohomologies étale et singulière, localisation et complétion homotopique (dont nous exposons une théorie légèrement différente de celle de Sullivan).

Table des matières

[1] nous discutons très brièvement (§ 1.4) la notion catégorique générale, exposée dans [5], de localisation ; il s'agit ici simplement de la localisation des groupes abéliens relativement à une partie multiplicative de $\mathbb{Z}$.

[2] même remarque pour la signification de ce terme.

1 Préliminaires catégoriques

Dans cette section, nous introduisons rapidement les principales notions catégoriques qui nous seront utiles (à l'exception des rudiments sur les catégories abéliennes nécessaires à la (co)homologie, que nous supposons acquis). Dans la première sous–section, nous définissons des notions générales (valables pour des catégories quelconques ou presque) — curieusement, la notion totalement générale de monade est un outil important dans la construction de Bousfield–Kan (cf. section 4). Dans la seconde, nous définissons les catégories simpliciales, efficaces pour traiter de nombreux problèmes topologiques (cf. sections 2 et 4). Dans les troisième et quatrième, nous introduisons les concepts généraux de localisation et de complétion — variante de la localisation en termes de pro–catégories — en en donnant des exemples très élémentaires. Enfin, nous introduisons dans la dernière sous–section le minimum d'algèbre homotopique (pratiquement sans démonstrations) utile à nos investigations ultérieures.

Références bibliographiques principales : [30] pour 1.1 et 1.2, [5] pour 1.3 et 1.4, [37] et [21] pour 1.5.

1.1 Généralités

1.1.1 Notations et exemples

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie[3]. Étant donnés des objets A et B de $\mathcal{C}$ (ce que nous abrègerons parfois abusivement en $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$), nous noterons $\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ (ou simplement $\hom(A,B)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté possible) l'ensemble des morphismes (appelés aussi flèches) de source A et de but B. La composée de deux flèches f et g sera notée, lorsqu'elle existe, $g \circ f$, $g \cdot f$ ou gf ; la flèche identique de $\hom(A,A)$ sera notée id_A (ou id s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Exemples :

1. Nous désignerons par **Ens** la catégorie des ensembles ($\hom_{\mathbf{Ens}}(A,B)$ dénotant l'ensemble des applications de A vers B).
2. Nous noterons **Top** la catégorie des espaces topologiques, les morphismes étant les applications continues. **Cel** (resp. $\mathbf{Cel}_f$) en désignera la sous–catégorie pleine formée des complexes cellulaires (resp. des complexes cellulaires finis).
3. **Grp**, **Ab**, **Ann**, $\mathbf{Mod}_A$ et $\mathbf{Aff}_A$ (A étant un anneau) désignerons respectivement les catégories des groupes, des groupes abéliens, des anneaux (toujours supposés associatifs et unitaires), des A-modules et des A-espaces affines (à gauche), avec les morphismes usuels.
4. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, nous noterons $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie opposée.
5. Soient $\mathcal{C}$ une *petite*[4] catégorie (ce qui signifie que ses objets forment un *ensemble*) et $\mathcal{D}$ une catégorie, $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ désignera la catégorie des foncteurs[5] de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, où $\hom(F,G) = \mathbf{Nat}(F,G)$ est l'ensemble des transformations naturelles de F dans G. Lorsque $\mathcal{D}$ possède des produits (resp. sommes), $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ aussi, avec $(\prod\limits_{i\in I} F_i)(X) = \prod\limits_{i\in I} F_i(X)$ (resp. $(\coprod\limits_{i\in I} F_i)(X) = \coprod\limits_{i\in I} F_i(X)$). On a des résultats analogues avec les limites projectives, inductives, les produits finis etc : ils existent dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ lorsqu'ils existent dans $\mathcal{D}$ et se calculent alors « argument par argument » (ceci sera utilisé implicitement par la suite).
6. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$. La *catégorie des objets de $\mathcal{C}$ au–dessus de X*, notée $\mathcal{C}_X$, a pour objets les morphismes $Y \to X$ (pour $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$), avec pour $\hom_{\mathcal{C}_X}(Y \to X, Z \to X)$ l'ensemble des morphismes $Y \to Z$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

[3] nous ne nous soucierons pas des problèmes axiomatiques que peuvent poser les catégories ; une manière de les résoudre est exposée dans [30], chapitre I.
[4] ceci vaudrait aussi pour une catégorie *essentiellement petite*, i.e. équivalente à une petite catégorie.
[5] sauf mention expresse du contraire, tous les foncteurs sont supposés *covariants*.

7. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie ayant un objet final $*$, la *catégorie des objets pointés dans* $\mathcal{C}$ est par définition $((\mathcal{C}^{op})_*)^{op}$ (ses objets sont donc les flèches $* \to X$ où X est un objet de $\mathcal{C}$) ; on la note $\mathcal{C}^*$.
8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit la catégorie $\mathbf{To}(\mathcal{C})$ comme suit : ses objets sont les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ munis de morphismes $X_{n+1} \to X_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), les morphismes de (X_n) vers (Y_n) étant les suites $(f_n : X_n \to Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de morphismes rendant commutatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\ Y_{n+1} \arrow[r] & Y_n \end{tikzcd}$$

1.1.2 Structure de groupe et action de groupe sur un objet

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant des produits finis [6]. On note $*$ son objet final (unique à unique isomorphisme près).

Définition 1 *On dit qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est muni d'une* ***structure de groupe*** *si l'on se donne :*

1. *un morphisme $\mu \in \hom_{\mathcal{C}}(X \times X, X)$ (appelé* ***multiplication****)*
2. *un point de base $e \in \hom_{\mathcal{C}}(*, X)$ (appelé* ***unité****)*
3. *un morphisme $i \in \hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ (dit de* ***passage à l'inverse****)*

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d] & X & X \arrow[r, "id"] \arrow[d] & X \\ * \times X \arrow[r, "e\times id"] & X \times X \arrow[u, "\mu"] & X \times * \arrow[r, "id\times e"] & X \times X \arrow[u, "\mu"] \end{tikzcd} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "i\times id"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \times X \arrow[r, "id\times i"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \arrow[u] \arrow[r] & X & X \arrow[u] \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{3}$$

où les flèches horizontales en bas désignent la composée $X \to * \xrightarrow{e} X$ et les flèches verticales de gauche la diagonale.

Le diagramme (1) traduit l'associativité, (2) que e est élément neutre, et (3) que i est le passage à l'inverse.

Définition 2 *On définit une catégorie $\mathcal{C}_{\mathbf{Grp}}$ ainsi : ses objets sont les objets de $\mathcal{C}$ munis d'une structure de groupe, et les morphismes de X dans Y sont les flèches f de $\mathcal{C}$ commutant à la multiplication en ce sens que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X \times X \arrow[u] \arrow[r, "f\times f"] & Y \times Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

commute, où les flèches verticales sont les multiplications [7].

Remarques :

– Si I est une petite catégorie, on a un isomorphisme canonique $\mathbf{Fct}(I, \mathcal{C})_{\mathbf{Grp}} \simeq \mathbf{Fct}(I, \mathcal{C}_{\mathbf{Grp}})$ (la vérification est immédiate).

[6] on suppose fait un choix de produit $X \times Y$ pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$; cette convention (et d'autres analogues) sera toujours implicitement adoptée par la suite.

[7] Comme dans le cas des groupes usuels, on vérifie que cela implique que f commute à l'élément neutre et au passage à l'inverse en un sens évident.

– On définit de façon analogue la notion d'objet muni d'une structure de monoïde (on ne suppose plus l'existence du passage à l'inverse), d'objet muni d'une structure d'anneau (on suppose que l'on a une struture de groupe commutatif et une structure de monoïde sur l'objet astreintes à vérifier un axiome de distributivité évident).
– Se donner une structure de groupe sur un objet X de $\mathcal{C}$ revient à se donner, pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, une structure de groupe naturelle sur l'ensemble $\hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ (cela résulte du lemme de Yoneda) ; on peut voir de même les objets munis d'une structure de monoïde ou d'anneau.

Désormais on se fixe $G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_{\mathbf{Grp}}$; on conserve les notations μ, e, i de la définition 1.

Définition 3 *On appelle* ***action (à gauche) de*** G *sur un objet* X *de* $\mathcal{C}$ *un morphisme* $a \in \hom_{\mathcal{C}}(G \times X, X)$ *tel que la composée* $X \to * \times X \xrightarrow{e\times id} G \times X \xrightarrow{a} X$ *soit l'identité et que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{id\times a} & G \times X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu\times id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle a} \\ G \times X & \xrightarrow{a} & X \end{array}$$

commute.

Les objets de $\mathcal{C}$ munis d'une action de G forment une catégorie notée $\mathcal{C}_G$ [8], les morphismes étant les flèches de $\mathcal{C}$ commutant à l'action de G en un sens évident.

Lorsqu'il existe, le coégalisateur (dans $\mathcal{C}$) des flèches $G \times X \xrightarrow{a} X$ et $G \times X \xrightarrow{pr} X$ (projection sur X) fournit un objet noté X/G muni d'un morphisme $X \to X/G$ appelé *projection canonique.*

Si A est un objet de $\mathcal{C}$ muni d'une structure d'anneau, on définit de manière évidente la notion de structure de A-module à gauche sur un objet de $\mathcal{C}$: c'est une structure de groupe commutatif sur cet objet et une action (en un sens convenable) de A sur celle–ci.

1.1.3 Monades

Définition 4 *On appelle* ***monade*** *sur une catégorie* $\mathcal{C}$ *un triplet* (F, φ, ψ) *où* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *est un foncteur et* $\varphi : id \to F$, $\psi : F^2 \to F$ *sont des transformations naturelles telles que, pour tout* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, *on ait*

1. $\psi_X F(\psi_X) = \psi_X \psi_{FX}$
2. $\psi_X F(\varphi_X) = \psi_X \varphi_{FX} = id$

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des catégories, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur adjoint à gauche à un foncteur $D : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Posons $F = DG : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Si l'on note, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\varphi_X \in \hom_{\mathcal{C}}(X, FX)$ la flèche image de id par l'isomorphisme $\hom_{\mathcal{D}}(GX, GX) \simeq \hom_{\mathcal{C}}(X, FX)$, on définit une transformation naturelle $\varphi : id \to F$. De même on a une transformation naturelle $GD \to id$, d'où en composant à gauche par D et à droite par G une transformation naturelle $\psi : F^2 = D(GD)G \to DidG = F$. On vérifie aisément (voir [30] pour les détails) que (F, φ, ψ) est une monade, dite *associée à l'adjonction.*

Proposition 1 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie,* X *un objet de* $\mathcal{C}$ *et* (F, φ, ψ) *une monade sur* $\mathcal{C}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. ψ_X *est inversible*
2. $F(\varphi_X)$ *est inversible*
3. φ_{FX} *est inversible*
4. $F(\varphi_{FX})$ *est inversible*

Démonstration : L'équivalence des trois premières assertions résulte de la deuxième condition de la définition. Il est évident que 3 implique 4. 4 entraîne 1 : il suffit de voir que ψ_X est inversible à gauche ; or par naturalité de ψ $F(\varphi_X)\psi_X = \psi_{FX} F^2(\varphi_X)$ donc $F(\psi_X)\psi_{FX}^{-1} F(\varphi_X)\psi_X = F(\psi_X F(\varphi_X)) = F(id) = id$ (ψ_{FX} est inversible car 2 implique 1), d'où le résultat.

Proposition 2 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie,* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *un foncteur et* $\varphi : id \to F$ *une transformation naturelle.*

1. *Si* $\psi : F^2 \to F$ *est une transformation naturelle telle que* (F, φ, ψ) *soit une monade, définissons, pour* $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, *une application* $b : \hom(X, FY) \times \hom(Z, FX) \to \hom(Z, FY)$ *par* $b(f, g) = \psi_Y \cdot Ff \cdot g$. *Alors*

[8] en pratique aucune confusion n'est à craindre avec la notation $\mathcal{C}_X$ (pour $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$) pour la catégorie des objets de $\mathcal{C}$ au-dessus de X.

(a) b est une application naturelle en X, Y, Z en ce sens que pour tous diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & FY \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle F\beta} \\ X' & \xrightarrow{f'} & FY' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & FX \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle F\alpha} \\ Z' & \xrightarrow{g'} & FX' \end{array} \tag{4}$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{b(f,g)} & FY \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle F\beta} \\ Z' & \xrightarrow{b(f',g')} & FY' \end{array} \tag{5}$$

(b) b est associative : pour $f \in \hom(X, FY)$, $g \in \hom(Z, FX)$ et $h \in \hom(A, FZ)$ on a $b(b(f,g),h) = b(f, b(g,h))$.

(c) pour $f \in \hom(X, FY)$ on a $b(f, \varphi_X) = b(\varphi_Y, f) = f$.

2. *Réciproquement, supposons donnée (pour tous $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$) une application $b : \hom(X, FY) \times \hom(Z, FX) \to \hom(Z, FY)$ vérifiant les trois conditions ci-dessus. Alors la formule $\psi_X = b(id_{FX}, id_{F^2X})$ définit une transformation naturelle $\psi : F^2 \to F$ telle que (F, φ, ψ) soit une monade.*

Démonstration : 1) (a) est clair.

(b) $b(b(f,g),h) = \psi_Y \cdot F(\psi_Y \cdot Ff \cdot g) \cdot h = (\psi_Y \cdot F(\psi_Y)) \cdot F^2 f \cdot Fg \cdot h = \psi_Y \cdot (\psi_{FY} \cdot F^2 f) \cdot Fg \cdot h$ par le point 1 de la définition précédente ; ceci est donc égal, ψ étant une transformation naturelle, à $\psi_Y \cdot Ff \cdot \psi_X \cdot Fg \cdot h = b(f, b(g,h))$.

(c) $b(f, \varphi_X) = \psi_Y \cdot (Ff \cdot \varphi_X) = (\psi_Y \cdot \varphi_{FY}) \cdot f$ car φ est une transformation naturelle ; ceci est donc égal à f par le point 2 de la définition.

De même $b(\varphi_Y, f) = \psi_Y \cdot F(\varphi_Y) \cdot f = f$.

2) Que φ soit une transformation naturelle résulte de (a) (prendre pour f, g, f', g' des identités dans (4)). Appliquant (a) aux les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & FY \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ FY & \xrightarrow{id} & FY \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & FX \\ \downarrow{\scriptstyle Ff\cdot g} & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ F^2Y & \xrightarrow{id} & F^2Y \end{array}$$

on obtient $b(f,g) = \psi_Y \cdot Ff \cdot g$. Alors (b) fournit le point 1 de la définition en prenant $f = g = h = id$, et (c) le point 2 (prendre $f = id$), ce qui achève la démonstration.

1.2 Objets simpliciaux

On définit une petite catégorie $\mathbf{\Delta}$ ainsi :

– **Objets** : pour $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbf{n} = \{0, 1, \ldots, n\}$ muni de sa relation d'ordre usuelle.

– **Morphismes** : les applications croissantes entre ces ensembles.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq i \leq n$ entier, on dispose de $d^i(n) \in \hom_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{n-1}, \mathbf{n})$ défini par :

$$d^i(n)(a) = \begin{cases} a & \text{si} \quad 0 \leq a < i \\ a+1 & \text{si} \quad i \leq a \leq n-1 \end{cases}$$

et pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq n$ entier, de $s^i(n) \in \hom_{\mathbf{\Delta}}(\mathbf{n+1}, \mathbf{n})$ défini par :

$$s^i(n)(a) = \begin{cases} a & \text{si} \quad 0 \leq a \leq i \\ a-1 & \text{si} \quad i < a \leq n+1 \end{cases}$$

En pratique on note d^i et s^i ces morphismes, l'indice n étant sous-entendu. Les d^i (resp. s^i) sont appelés opérateurs de *coface* (resp. opérateurs de *codégénérescence*). Ils vérifient les *identités cosimpliciales* :

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & \text{si} \quad i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & \text{si} \quad i < j \\ s^j d^j = s^j d^{j+1} = id & \\ s^j d^{i+1} = d^i s^j & \text{si} \quad i > j \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & \text{si} \quad i \leq j \end{cases} \tag{6}$$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle catégorie des *objets simpliciaux (resp. cosimpliciaux) dans* $\mathcal{C}$, et l'on note $s\mathcal{C}$ (resp. $c\mathcal{C}$), la catégorie $\mathbf{Fct}(\boldsymbol{\Delta}^{op},\mathcal{C})$ (resp. $\mathbf{Fct}(\boldsymbol{\Delta},\mathcal{C})$).

Pour $X \in \operatorname{Ob} s\mathcal{C}$ (resp. $X \in \operatorname{Ob} c\mathcal{C}$) et $n \in \mathbb{N}$, on note X_n (resp. X^n) pour $X(\mathbf{n})$ et d_i, s_j (resp. d^i, s^j) — où $0 \leq i \leq n$ (pour $n \geq 1$) et $0 \leq j \leq n$ — pour $X(d^i) \in \hom_{\mathcal{C}}(X_n, X_{n-1})$ et $X(s^j) \in \hom_{\mathcal{C}}(X_n, X_{n+1})$ (resp. pour $X(d^i) \in \hom_{\mathcal{C}}(X^{n-1}, X^n)$ et $X(s^j) \in \hom_{\mathcal{C}}(X^{n+1}, X^n)$) ; les d_i (resp. d^i) étant appelés opérateurs de *face* (resp. *coface*) et les s_j (resp. s^j) opérateurs de *dégénérescence* (resp. *codégénérescence*) [9].

Dans le cas d'un objet cosimplicial, les d^i, s^j satisfont aux identités cosimpliciales (6) ; dualement, pour un objet simplicial, les d_i, s_j satisfont aux *identités simpliciales* :

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si} \quad i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \text{si} \quad i < j \\ d_j s_j = d_{j+1} s_j = id & \\ d_{i+1} s_j = s_j d_i & \text{si} \quad i > j \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si} \quad i \leq j \end{cases} \tag{7}$$

On vérifie que, réciproquement, une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$) d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ munie de flèches $d_i \in \hom_{\mathcal{C}}(X_n, X_{n-1})$ (resp. $d^i \in \hom_{\mathcal{C}}(X^{n-1}, X^n)$) pour $0 \leq i \leq n$ et $s_j \in \hom_{\mathcal{C}}(X_n, X_{n+1})$ (resp. $s^j \in \hom_{\mathcal{C}}(X^{n+1}, X^n)$) pour $0 \leq j \leq n$ vérifiant (7) (resp. (6)) définit un objet de $s\mathcal{C}$ (resp. $c\mathcal{C}$) — il s'agit d'une propriété de la catégorie $\boldsymbol{\Delta}$ établie dans [30] (chapitre VII) par exemple. Avec cette description de $s\mathcal{C}$ (resp. $c\mathcal{C}$), une flèche $(X_n) \to (Y_n)$ (resp. $(X^n) \to (Y^n)$) est une suite de flèches (de $\mathcal{C}$) $X_n \to Y_n$ (resp. $X^n \to Y^n$) compatible en un sens évident aux morphismes d_i et s_i (resp. d^i et s^i).

Les objets de la catégorie $s\mathbf{Ens}$, notée $\mathbf{S}$, sont appelés *ensembles simpliciaux*, ou parfois *complexes*.

1.3 Pro–catégories

Définition 5 – *Une catégorie I est dite **filtrante à gauche** si*

1. *pour tous $A, B \in \operatorname{Ob} I$ il existe $X \in \operatorname{Ob} I$ tel que $\hom(X,A) \neq \varnothing$ et $\hom(X,B) \neq \varnothing$.*
2. *pour toutes flèches $f, g \in \hom(A,B)$ il existe $X \in \operatorname{Ob} I$ et $u \in \hom(X,A)$ tels que $fu = gu$.*

– *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **pro–objet** dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ où I est une petite catégorie filtrante à gauche (un tel objet sera souvent noté $(F_i)_{i\in I}$). On note $\text{pro}-\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les pro–objets dans $\mathcal{C}$, avec $\hom_{\text{pro}-\mathcal{C}}(A,B) = \varprojlim_{j\in J} (\varinjlim_{i\in I} \hom_{\mathcal{C}}(A_i, B_j))$, où $A = (A_i)_{i\in I}$ et $B = (B_j)_{j\in J}$* [10].

Remarques :

- Un ensemble ordonné X filtrant à gauche (pour tous $a, b \in X$ il existe $c \in X$ tel que $c \geq a$ et $c \geq b$) s'identifie à une petite catégorie filtrante à gauche.
- $\mathbf{To}(\mathcal{C})$ s'identifie à une sous–catégorie de $\text{pro}-\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ à une sous–catégorie pleine.
- Tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se prolonge en un foncteur $\text{pro}-F : \text{pro}-\mathcal{C} \longrightarrow \text{pro}-\mathcal{D}$ par $(X_i)_{i\in I} \longmapsto (FX_i)_{i\in I}$; lorsque $\mathcal{D}$ a des limites projectives filtrantes, on utilisera en général le prolongement $\text{pro}-\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ $(X_i)_{i\in I} \longmapsto \varprojlim_{i\in I} FX_i$.
- $\text{pro}-\mathcal{C}$ possède tautologiquement des limites projectives filtrantes (i.e. relatives à une petite catégorie filtrante à gauche) et tout objet de $\text{pro}-\mathcal{C}$ est limite projective filtrante d'objets de $\mathcal{C}$ par construction. Cependant, même lorsque $\mathcal{C}$ a des limites projectives filtrantes, le foncteur d'oubli $\mathcal{C} \to \text{pro}-\mathcal{C}$ n'est que très exceptionnellement une équivalence de catégories : si $(A_i)_{i\in I}$ est un pro–objet de $\mathcal{C}$, le $\text{pro}-\mathcal{C}$-morphisme canonique $\varprojlim_{i\in I} A_i \to (A_i)_{i\in I}$ ne peut être un isomorphisme que si pour tout objet X de $\mathcal{C}$ le morphisme canonique $\varinjlim_{i\in I} \hom_{\mathcal{C}}(A_i, X) \to \hom_{\mathcal{C}}(\varprojlim_{i\in I} A_i, X)$ est un isomorphisme (ce qui n'est en général vrai que sous des hypothèses de finitude sur X — la noethérianité pour un module, par exemple — qui interdisent la stabilité par limite projective filtrante).
  Par exemple, la limite projective (ensembliste) d'un pro–ensemble est naturellement munie d'une topologie (la limite projective des topologies discrètes) et on ne peut espérer une équivalence de catégories entre $\text{pro}-\mathbf{Ens}$ et $\mathbf{Ens}$. Si $\mathcal{C}$ est la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Ens}$ formée des ensembles finis, on montre (cf. [17], chapitre II) que $\text{pro}-\mathcal{C}$ est naturellement équivalente à la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Top}$ formée des espaces compacts totalement discontinus ; on a un résultat analogue avec pour $\mathcal{C}$ la catégorie des groupes finis (*ibid.*).

[9] La justification géométrique de cette terminologie apparaîtra au paragraphe 2.1.
[10] la composition étant définie de manière évidente à partir de celle de $\mathcal{C}$.

Définition 6 *une sous–catégorie pleine J d'une catégorie filtrante à gauche I est dite* **cofinale** *dans I si pour tout $A \in \operatorname{Ob} I$, il existe $X \in \operatorname{Ob} J$ tel que* $\hom(X, A) \neq \varnothing$.

On vérifie aussitôt à partir des définitions la propriété suivante :

Proposition 3
- *Une sous–catégorie pleine cofinale dans une catégorie filtrante à gauche est filtrante à gauche.*
- *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, I une petite catégorie filtrante à gauche, J une sous–catégorie pleine cofinale de I, $F : I \to \mathcal{C}$ un pro–objet de $\mathcal{C}$, $F' : J \to \mathcal{C}$ sa restriction à J. Alors on a un pro–isomorphisme canonique $F' \simeq F$. En particulier, si $(X_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un pro-objet ($\mathbb{N}^2$ muni de l'ordre produit est une petite catégorie filtrante à gauche), l' « inclusion diagonale » $(X_{n,m}) \to (X_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un pro–isomorphisme.*

Définition 7 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to$* **Ens** *est dit* ***pro–représentable*** *s'il est isomorphe à un foncteur $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \longmapsto \hom_{\mathrm{pro}-\mathcal{C}}(X, A)$ pour un $X \in \operatorname{Ob}\mathrm{pro}-\mathcal{C}$.*

Les remarques précédentes montrent que, même si $\mathcal{C}$ a des limites projectives filtrantes, la notion de pro–représentabilité est plus faible que celle de représentabilité ; mais un pro–objet pro–représentant un foncteur apporte aussi en général plus d'informations (par exemple de nature topologique dans les cas cités ci–avant) que sa limite projective dans $\mathcal{C}$.

1.4 Localisation et complétion relativement à une sous–catégorie

Définition 8 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{C}'$ une sous–catégorie. On appelle* ***localisation dans $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{C}'$*** *tout foncteur $\mathcal{C} \xrightarrow{L} \mathcal{C}'$ adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathcal{C}' \xrightarrow{Ou} \mathcal{C}$ (donc pour tout $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ $L(X)$ représente le foncteur $\mathcal{C}' \to$* **Ens** *$Y \longmapsto \hom_{\mathcal{C}}(X, Ou(Y))$). On appelle* ***complétion de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{C}'$*** *tout foncteur $\mathcal{C} \xrightarrow{C} \mathrm{pro}-\mathcal{C}'$ tel qu'on ait, pour tous $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'(\subset \mathrm{pro}-\mathcal{C}')$ un isomorphisme naturel $\hom_{\mathcal{C}}(X, Ou(Y)) \simeq \hom_{\mathrm{pro}-\mathcal{C}'}(C(X), Y)$ (donc $C(X)$ pro–représente le foncteur $\mathcal{C}' \to$* **Ens** *$Y \longmapsto \hom_{\mathcal{C}}(X, Ou(Y))$).*

Autrement dit, $\mathcal{C} \xrightarrow{L} \mathcal{C}'$ est une localisation si et seulement si on a une transformation naturelle $id \xrightarrow{\varphi} Ou \circ L$ telle que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, tout objet Y de $\mathcal{C}'$ et tout morphisme $f \in \hom_{\mathcal{C}}(X, Ou(Y))$ il existe un unique $f_* \in \hom_{\mathcal{C}'}(L(X), Y)$ tel que $f = f_* \circ \varphi_X$; on a une caractérisation analogue de la complétion par une propriété universelle. Une complétion est équivalente à une localisation entre les pro–catégories correspondantes.

Proposition 4 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathcal{C}'$ une sous–catégorie* **pleine**, *$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur et $\theta : id \to Ou \circ L$ (où $Ou : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ est le foncteur d'oubli) une transformation naturelle. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *(L, θ) est une localisation,*
2. *(a) $\forall X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$ $\theta_X : X \to LX$ est un isomorphisme,*
   (b) $\forall X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ $\theta_{LX} = L(\theta_X)$.

Démonstration : (1) ⇒ (a) clairement ; (1) ⇒ (b) car $\theta_{LX}\theta_X = L(\theta_X)\theta_X : X \to L^2X$ et L^2X est un objet de $\mathcal{C}'$.
(2) ⇒ (1) : Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une flèche de $\mathcal{C}$ avec $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$. $g = \theta_Y^{-1} \cdot Lf$ vérifie $g \cdot \theta_X = f$. Si $h : LX \to Y$ est tel que $h \cdot \theta_X = f$, alors $Lh \cdot \theta_{LX} = Lf$ donc, comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} LX & \xrightarrow{h} & Y \\ {\scriptstyle\theta_{LX}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\theta_Y} \\ L^2X & \xrightarrow{Lh} & LY \end{array}$$

est commutatif, $\theta_Y \cdot h = Lf$ et $h = g$, d'où le résultat.

On a un analogue évident à cette proposition pour la complétion relativement à une sous–catégorie pleine.

Exemples :

1. Pour tout anneau A, les foncteurs **Ens** $\xrightarrow{l_A}$ $\mathbf{Mod}_A$ $X \longmapsto A^{(X)}$ (A-module libre construit sur X), **Ens** $\xrightarrow{c_A}$ $\mathbf{Aff}_A$ $X \longmapsto \{\sum_{i\in I} t_ix_i \in l_A(X) | x_i \in X,\ t_i \in A,\ \sum_{i\in I} t_i = 1\}$ et
   $\mathbf{Ens}^* \xrightarrow{\tilde{l}_A} \mathbf{Mod}_A$ $(* \to X) \longmapsto$ *coker* $(l_A(*) \to l_A(X))$ sont des localisations. Pour tout ensemble pointé $* \to X$, la composée $c_A(X) \hookrightarrow l_A(X) \to \tilde{l}_A(* \to X)$ est un isomorphisme de A-espaces affines (pointer un espace affine en fait canoniquement un module).
2. Le foncteur **Grp** → **Ab** qui à un groupe associe son abélianisé est une localisation.

3. Pour tout anneau A, le foncteur $A \otimes \cdot : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}_A$ est une localisation.
4. La compactification de Stone–Čech (cf. [9]) est une localisation de **Top** relativement à la sous–catégorie pleine des espaces compacts.
5. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous–catégories pleines de réunion $\mathcal{G}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $L_n : \mathcal{C} \to \mathcal{F}_n$ une localisation. Alors on vérifie aussitôt que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathcal{C} \to \mathbf{To}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \text{pro} - \mathcal{G}$ est une complétion.
6. **Grp** admet une complétion relativement à la sous–catégorie pleine des groupes finis (appelée *complétion profinie*) : à un groupe G on associe le pro–groupe formé des quotients finis de G (ordonné de façon évidente) — cf. [17]. Pour une généralisation de cet exemple à d'autres sous–catégories de **Grp**, voir [5] [11].

1.5 Catégories de modèles et catégories homotopiques

1.5.1 Catégories de modèles fermées

Définition 9 *On appelle* ***catégorie de modèles fermée*** *une catégorie $\mathcal{C}$ munie de trois classes de morphismes, appelés* ***équivalences faibles, fibrations*** *et* ***cofibrations*** *vérifiant les axiomes suivants, où l'on dit* ***triviale*** *une fibration ou une cofibration qui est aussi une équivalence faible :*

(CM1) *$\mathcal{C}$ a des limites projectives et inductives finies.*

(CM2) *Pour $A, B, C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $f \in \hom(A, B)$ et $g \in \hom(B, C)$, si deux des flèches f, g et $g \circ f$ sont des équivalences faibles, la troisième l'est également.*

(CM3) *Tout rétracte d'une équivalence faible (resp. d'une fibration, d'une cofibration) est une équivalence faible (resp. fibration, cofibration).*
(On dit que $g \in \hom(A', B')$ est un rétracte de $f \in \hom(A, B)$ s'il existe $a \in \hom(A', A)$, $\alpha \in \hom(A, A')$, $b \in \hom(B', B)$ et $\beta \in \hom(B, B')$ tels que $\alpha \cdot a = id$, $\beta \cdot b = id$ et que commute le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{a} & A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B' & \xrightarrow{b} & B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array} \qquad)$$

(CM4) *Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

où p est une fibration et i une cofibration, si p ou i est triviale, il existe $r \in \hom(B, X)$ tel que $ri = f$ et $pr = g$. (on dit que p (resp. i) a la ***propriété de relèvement à droite (resp. à gauche)*** *relativement à i (resp. p))*

(CM5) *Toute flèche $f \in \hom(A, B)$ peut se factoriser en*
(a) $f = p \cdot i$ où p est une fibration et i une cofibration triviale.
(b) $f = q \cdot j$ où q est une fibration triviale et j une cofibration.

Par **(CM1)**, une telle catégorie possède un objet initial, que l'on notera $\varnothing$, et un objet final, que l'on notera $*$.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de modèles fermée, on munit $\mathcal{C}^{op}$ d'une structure de catégorie de modèles fermée (dite *duale* de celle de $\mathcal{C}$) en prenant pour équivalences faibles les morphismes qui vus dans $\mathcal{C}$ sont des équivalences faibles, comme fibrations (resp. cofibrations) les morphismes qui vus dans $\mathcal{C}$ sont des cofibrations (resp. des fibrations).

Définition 10 *Un objet X d'une catégorie de modèles fermée $\mathcal{C}$ est dit* ***fibrant*** *(resp.* ***cofibrant****) si l'unique morphisme $X \to *$ (resp. $\varnothing \to X$) est une fibration (resp. une cofibration).*

Nous utiliserons, souvent implicitement, les propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 5 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles fermée.*

1. *Une flèche de $\mathcal{C}$ est une fibration (resp. une cofibration) si et seulement si elle a la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) relativement à toutes les cofibrations triviales (resp. fibrations triviales).*
2. *Une flèche de $\mathcal{C}$ est une fibration triviale (resp. une cofibration triviale) si et seulement si elle a la propriété de relèvement à droite (resp. à gauche) relativement à toutes les cofibrations (resp. fibrations).*

[11] Cet exemple fondamental explique la terminologie de complétion : la complétion profinie d'un groupe coïncide, via l'identification des pro–groupes à des groupes topologiques, avec la complétion — au sens des structures uniformes — de ce groupe muni de la topologie pour laquelle les sous–groupes distingués d'indice fini forment un système fondamental de voisinages de l'élément neutre.

3. *Une composée de fibrations (resp. de cofibrations) est une fibration (resp. une cofibration).*
4. *Si dans un diagramme commutatif cartésien*
$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \longrightarrow & B \end{array}$$
p est une fibration, alors p^* est une fibration.
5. *Si dans un diagramme commutatif cocartésien*
$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_*} \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$
i est une cofibration, i_* est une cofibration.
6. *Un morphisme est un isomorphisme si et seulement si c'est à la fois une fibration, une cofibration et une équivalence faible.*

Démonstration : Montrons 1) : soit $X \xrightarrow{f} Y$ une flèche de $\mathcal{C}$ ayant la propriété de relèvement à droite relativement à toutes les cofibrations triviales. Par **(CM5)**a, f a une factorisation $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y$ où p est une fibration et i une cofibration triviale, donc il existe dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & = & X \\ {\scriptstyle i}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f}\Big\downarrow \\ Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

un relèvement $r : Z \to X$: on a $r \cdot i = id_X$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Z & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle f}\Big\downarrow & & {\scriptstyle p}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f}\Big\downarrow \\ Y & = & Y & = & Y \end{array}$$

commute, de sorte que **(CM3)** établit que f est une fibration. L'autre assertion de 1) s'en déduit par dualité ; 2) se prouve de même en utilisant **(CM5)**b au lieu de**(CM4)**a. 3), 4) et 5) découlent de 1) et 2) ; 6) est une conséquence directe de 2) et **(CM4)**.

1.5.2 Homotopie dans les catégories de modèles fermées

Dans ce paragraphe on se fixe une catégorie de modèles fermée $\mathcal{C}$. Pour toutes les démonstrations (et vérifications implicites), on renvoie à [21] (chapitre II).

La justification topologique de la terminologie apparaîtra au paragraphe 2.1.1.

Définition 11 *1. Soit X un objet de $\mathcal{C}$. On appelle **cylindre** (resp. **espace de chemins**) pour X tout objet $\tilde{X}$ (resp. $\hat{X}$) muni d'une cofibration $X \sqcup X \xrightarrow{i} \tilde{X}$ (resp. d'une fibration $\hat{X} \xrightarrow{p} X \times X$) et d'une équivalence faible $\tilde{X} \xrightarrow{\alpha} X$ (resp. $X \xrightarrow{a} \hat{X}$) telles que $\alpha i = id \sqcup id : X \sqcup X \to X$ (resp. $pa = id \times id : X \to X \times X$).*

*2. Soient $f, g : X \to Y$ deux morphismes de $\mathcal{C}$. On dit que f et g sont **homotopes à gauche (resp. à droite)** relativement à un choix $(\tilde{X}, i, \alpha)$ (resp. $(\hat{Y}, p, a)$) de cylindre (resp. d'espace de chemins) pour X (resp. Y) s'il existe $h \in \hom(\tilde{X}, Y)$ (resp. $H \in \hom(X, \hat{Y})$) rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{f \sqcup g} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\| \\ \tilde{X} & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \qquad (resp. \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H} & \hat{Y} \\ \Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f \times g} & Y \times Y \end{array})$$

*On dit alors que h (resp. H) est une **homotopie à gauche (resp. à droite)** de f à g.*

Proposition 6 *1. Tout objet admet un cylindre et un espace de chemins.*

2. Soient $f, g \in \hom(X, Y)$ avec X cofibrant et Y fibrant. Alors f et g sont homotopes à droite si et seulement si elles sont homotopes à gauche ; de plus ces notions ne dépendent pas du choix du cylindre pour X ou de l'espace de chemins pour Y.

On dira donc simplement, dans ce cas, que f et g sont *homotopes.*

Proposition 7 *Soient X un objet cofibrant et Y un objet fibrant de $\mathcal{C}$. Sur $\hom(X, Y)$, l'homotopie est une relation d'équivalence*[12].

Proposition 8 *(**théorème de Whitehead**) Soient X et Y des objets fibrants et cofibrants. Une flèche $f \in \hom(X, Y)$ est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie (id est il existe $g \in \hom(Y, X)$ telle que $f \cdot g$ et $g \cdot f$ soient homotopes à id).*

Soit $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$: appliquant l'axiome **(CM5) a** (resp. **(CM5) b**) à la flèche $\varnothing \to X$ (resp. $X \to *$), on obtient un objet cofibrant (resp. fibrant) CX (resp. FX) et un fibration triviale (resp. une cofibration triviale) $CX \to X$ (resp. $X \to FX$). Alors FCX est fibrant et cofibrant ($\varnothing \to CX \to FCX$ est une cofibration comme composée de deux cofibrations). On vérifie que (même si FCX n'est pas unique), pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\pi(FCX, FCY)$ des classes d'homotopie de morphismes $FCX \to FCY$ ne dépend pas du choix de FCX (ou FCY) ; on appelle *catégorie homotopique associée à* $\mathcal{C}$, et l'on note $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$, la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$, avec $\hom_{\mathbf{Ho}(\mathcal{C})}(X, Y) = \pi(FCX, FCY)$.

Proposition 9 *On a un foncteur canonique $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ égal à l'identité sur les objets et vérifiant la propriété universelle suivante :*

- *$f \in \hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est une équivalence faible si et seulement si $\mathcal{H}(f)$ est un isomorphisme.*
- *pour tout foncteur $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ tel que $F(f)$ soit un isomorphisme pour toute équivalence faible f (dans $\mathcal{C}$), il existe un unique foncteur $\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \xrightarrow{F_*} \mathcal{D}$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathcal{H}"] & \mathcal{D} \\ \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[r, equal] & \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \arrow[u, "F_*"'] \end{tikzcd}$$

1.5.3 Catégories de modèles simpliciales

La notion que nous introduisons ici par souci de cohérence dépend de la définition de la structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathbf{S}$ donnée au paragraphe 2.1.3 ci-après.

Définition 12 *On appelle **catégorie simpliciale** une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{S}$ tel que pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$*

1. *$\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_0 = \hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$*
2. *le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) : \mathcal{C} \to \mathbf{S}$ a un adjoint à gauche $X \otimes \cdot : \mathbf{S} \to \mathcal{C}$ tel qu'on ait un isomorphisme $X \otimes (A \times B) \simeq (X \otimes A) \otimes B$ naturel en X et $A, B \in \operatorname{Ob} \mathbf{S}$.*
3. *le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, Y) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{S}$ a un adjoint à gauche $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, Y) : \mathbf{S} \to \mathcal{C}^{op}$.*

*Une **catégorie de modèles simpliciale** est une catégorie $\mathcal{C}$ qui est à la fois une catégorie de modèles fermée et une catégorie simpliciale, avec la condition de compatibilité suivante :*

(SM7) *Si $A \xrightarrow{i} B$ est une cofibration et $X \xrightarrow{p} Y$ une fibration dans $\mathcal{C}$, l'application induite $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \xrightarrow{(i^*, p_*)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \times_{\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y)} \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y)$ est une fibration dans $\mathbf{S}$, qui est triviale si i ou p l'est.*

Toutes les catégories de modèles fermées que nous introduirons peuvent en fait être munies de structures de catégorie de modèles simpliciale.

Proposition 10 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles simpliciale.*

1. *Si $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ est cofibrant et $X \xrightarrow{i} Y$ est une cofibration dans $\mathbf{S}$, alors $A \otimes X \xrightarrow{id \otimes i} A \otimes Y$ est une cofibration (dans $\mathcal{C}$).*
2. *Pour $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ cofibrant, $A \otimes \Delta^1$ est un cylindre pour A.*

[12] ce qui n'est pas en général le cas sans hypothèses sur X et Y.

La démonstration de ces propriétés élémentaires est fournie dans [21], chapitre II, où l'on trouvera également des critères généraux d'existence de structures de catégorie de modèles fermée ou de catégorie de modèles simpliciale.

Sauf mention expresse du contraire, les homotopies entre morphismes de source cofibrante A dans une catégorie de modèles simpliciale seront relatives au choix de cylindre canonique $A \otimes \Delta^1$.

Proposition 11 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles simpliciale, $X \xrightarrow{f} Y$ une équivalence faible de $\mathcal{C}$ avec X et Y fibrants, A un objet cofibrant de $\mathcal{C}$. Alors $\mathbf{Hom}(A,X) \xrightarrow{f_*} \mathbf{Hom}(A,Y)$ est un équivalence d'homotopie dans $\mathbf{S}$.*

Pour la démonstration, voir [10] (chapitre X, §5).

Proposition 12 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles simpliciale. Dans un diagramme du type de **(CM4)** avec A cofibrant, étant donnés deux relèvements r, r' (i.e. morphismes dont **(CM4)** affirme l'existence), il existe une homotopie $h : B \otimes \Delta^1 \to X$ de r à r' telle que $h \circ (i \otimes id_{\Delta^1}) = f \otimes id_{\Delta^1}$ et $(p \otimes id_{\Delta^1}) \circ h = g \otimes id_{\Delta^1}$.*

La démonstration est fournie dans [21].

2 Préliminaires topologiques et simpliciaux

Dans cette section, nous introduisons l'essentiel des outils topologiques nécessaires pour la section 4. Comme la construction principale de celle–ci est (co)simpliciale, nous présentons les résultats classiques des sous–sections 2.2 à 2.4 sous forme simpliciale, la sous–section 2.1 montrant en quoi espaces topologiques et ensembles simpliciaux sont essentiellement équivalents au niveau homotopique. Des théorèmes généraux et formels d'existence de structures de catégorie de modèles fermée, que nous n'exposons pas, fournissent des méthodes efficaces, notamment pour l'étude des fibrations principales simpliciales, dont nous donnons les propriétés les plus élémentaires dans 2.2. Les sous–sections 2.3 et 2.4 contiennent essentiellement des définitions, les propriétés non triviales étant admises. Enfin, nous introduisons dans 2.5 la notion d'espace cosimplicial sur laquelle repose la construction de Bousfield–Kan (cf. section 4).

Références bibliographiques principales : [21] pour 2.1 à 2.4, [10] pour 2.5.

2.1 Les catégories de modèles fermées Top et S

2.1.1 La structure usuelle de catégorie de modèles fermée sur Top

Pour la démonstration des propositions de ce paragraphe, on renvoie à [21], chapitre I et [37] [13] .

Définition 13
1. *Une application continue $X \xrightarrow{f} Y$ est appelée une **fibration de Serre (resp. de Hurewicz)** si elle a la propriété de relèvement des homotopies de complexes cellulaires (resp. d'espaces topologiques quelconques), i.e. si pour tout complexe cellulaire (resp. espace topologique) E et tout diagramme commutatif*
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ E \times [0,1] & \xrightarrow{v} & Y \end{array}$$
où $i(x) = (x, 0)$, il existe une application continue $H : E \times [0,1] \to X$ telle que $f \circ H = v$ et $H \circ i = u$.
2. *Une application continue $X \xrightarrow{f} Y$ est appelée une **équivalence faible** si elle induit un isomorphisme $\pi_0 X \to \pi_0 Y$ et si pour tout point de base dans X et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_* : \pi_n X \to \pi_n Y$ est un isomorphisme.*

Proposition 13 *Il existe une (unique) structure de catégorie de modèles fermée sur* **Top** *dont les fibrations soient les fibrations de Serre, les équivalences faibles étant comprises au sens de la définition précédente.*

Nous munirons systématiquement **Top** de cette structure.

Proposition 14 *Tout complexe cellulaire est un espace topologique cofibrant.*

Il est clair que tout espace topologique X est fibrant ; il est tout aussi immédiat que l'espace usuel de chemins — i.e. l'ensemble des applications continues $X \to [0,1]$ muni de la topologie de la convergence compacte (cf. [9]) — muni des applications évidentes est un espace de chemins au sens des catégories de modèles fermées ; de même, si X est un complexe cellulaire [14], $X \times [0,1]$ est un cylindre pour X. Ainsi, entre complexes cellulaires, la notion abstraite d'homotopie introduite ci-avant coïncide avec la notion usuelle.

[13] ces ouvrages prennent en fait une définition un peu différente de la nôtre de la notion de fibration de Serre ; cependant, les résultats qu'ils prouvent permettent aisément de montrer l'équivalence des deux définitions.

[14] on peut éviter le rôle ainsi joué par les complexes cellulaires, ainsi que la dissymétrie entre fibration et cofibration, en munissant **Top** d'une structure de catégorie de modèles fermée (que nous n'utiliserons pas) dont les fibrations soient celles de Hurewicz : alors tout espace

2.1.2 Les foncteurs adjoints S et $|\cdot|$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le *n-simplexe simplicial (resp. topologique) standard*, et l'on note Δ^n (resp. D^n), l'objet de $\mathbf{S}$ (resp. $\mathbf{Top}$) $\hom_\Delta(\cdot, \mathbf{n})$ (resp. $\{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \forall i \quad t_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$ pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$). On a en fait un *foncteur* $\Delta \to \mathbf{Top} \quad \mathbf{n} \longmapsto D^n$, qui envoie $\varphi \in \hom_\Delta(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ sur l'application continue $D^n \to D^m \quad (t_0, \ldots, t_n) \longmapsto (\sum_{\varphi(j)=i} t_j)_{0 \leq i \leq m}$. Cela permet de définir, pour tout espace topologique X, un ensemble simplicial $S(X) : \mathbf{n} \longmapsto \hom_{\mathbf{Top}}(D^n, X)$ appelé *ensemble singulier associé à* X. Cela définit clairement un foncteur $S : \mathbf{Top} \to \mathbf{S}$.

Le foncteur $\Delta \to \mathbf{S} \quad \mathbf{n} \longmapsto \Delta^n$ est un plongement pleinement fidèle : en effet pour tout ensemble simplicial X on a (en considérant l'image de $id_{\mathbf{n}} \in \Delta^n_n$ dans X_n) un isomorphisme canonique

$$\hom_{\mathbf{S}}(\Delta^n, X) \simeq X_n \qquad , \tag{8}$$

ce qui nous permet de considérer Δ comme une sous-catégorie (pleine) de $\mathbf{S}$; pour tout $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{S}$ on dispose donc de la petite catégorie Δ_X (cf. 1.1.1). On définit la *réalisation géométrique* de X, et l'on note $|X|$, comme la limite inductive du foncteur $\Delta_X \to \mathbf{Top} \quad (\Delta^n \to X) \longmapsto D^n$. En particulier $|\Delta^n| = D^n$ canoniquement.

$|\cdot| : \mathbf{S} \to \mathbf{Top}$ définit clairement un foncteur.

Proposition 15 *Le foncteur $|\cdot|$ est adjoint à gauche au foncteur S.*

Démonstration : Pour $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{S}$ et $Y \in \operatorname{Ob}\mathbf{Top}$, on a des isomorphismes naturels $\hom_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \simeq \varprojlim_{\Delta_X} \hom_{\mathbf{Top}}(D^n, Y) \simeq \varprojlim_{\Delta_X} \hom_{\mathbf{S}}(\Delta^n, S(Y)) \simeq \hom_{\mathbf{S}}(X, S(Y))$ car la flèche tautologique [15] $\varinjlim_{\Delta_X} \Delta^n \to X$ est un isomorphisme (en effet les objets de Δ_X s'identifient aux X_n par (8), et les flèches de Δ_X permettent de même de retrouver les applications de structure simpliciale, ce qui prouve la propriété universelle requise), d'où le résultat.

Définition 14 *Soient X un ensemble simplicial et $n \in \mathbb{N}$. On appelle **n-squelette** de X, et l'on note $\operatorname{sk_n} X$, le plus petit sous–objet de X tel que $(\operatorname{sk_n} X)_i = X_i$ pour $i \leq n$.*

(Ceci est bien défini car $\mathbf{S}$ a des sommes amalgamées)

Proposition 16 *Pour tout ensemble simplicial X, $|X|$ est un complexe cellulaire dont le n-squelette (i.e. le sous-espace formé des cellules de dimension $\leq n$) s'identifie à $|\operatorname{sk_n} X|$.*

Pour la démonstration, voir [21] (chapitre I).

Comme $|\Delta^0| = D^0$ et $S(D^0) = \Delta^0$ et que Δ^0 (resp. D^0) est objet final de $\mathbf{S}$ (resp. $\mathbf{Top}$), le foncteur $|\cdot|$ (resp. S) se prolonge en un foncteur $\mathbf{S}^* \to \mathbf{Top}^*$ (resp. $\mathbf{Top}^* \to \mathbf{S}^*$) encore noté $|\cdot|$ (resp. S) de façon évidente. Cela permet de définir les *groupes d'homotopie simpliciale* [16] :

Définition 15 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{S}^*$, on pose $\pi_n(X) = \pi_n(|X|)$. Pour $X \in \operatorname{Ob}\mathbf{S}$ on pose $\pi_0(X) = \pi_0(|X|)$.*

Cela définit des foncteurs $\pi_0 : \mathbf{S} \to \mathbf{Ens}$, $\pi_1 : \mathbf{S}^* \to \mathbf{Grp}$ et $\pi_n : \mathbf{S}^* \to \mathbf{Ab}$ pour $n \geq 2$.

2.1.3 La catégorie de modèles simpliciale S

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, on note $F^n(k)$ le plus petit sous–complexe de Δ^n tel que $F^n(k)_{n-1}$ contienne les $d_i(\alpha)$ pour $0 \leq i \leq n-1, \quad i \neq k$, où $\alpha = id_{\mathbf{n}} \in \Delta^n_n$.

Définition 16 *Un morphisme d'ensembles simpliciaux est appelé une **fibration de Kan** (ou simplement fibration) s'il a la propriété de relèvement à droite relativement à toutes les inclusions $F^n(k) \hookrightarrow \Delta^n$.*

---

topologique est fibrant et cofibrant, $\hom_{\mathbf{Ho(Top)}}(X, Y)$ est toujours l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $X \to Y$. Malheureusement, cette structure de catégorie de modèles fermée plus forte (en ce sens que la catégorie homotopique associée permet d'étudier l'homotopie sans avoir à se restreindre à des complexes cellulaires) ne peut être traitée par les méthodes simpliciales efficaces que nous allons exposer.

[15] comme $\mathbf{Ens}$, $\mathbf{S}$ a des limites inductives (et projectives).

[16] il est possible (et indispensable si l'on souhaite prouver les résultats admis au paragraphe suivant) de donner une définition de ces groupes indépendante de celle des π_n topologiques pour des ensembles simpliciaux *fibrants* — cf. [21].

Proposition 17 *1. Une application continue f est une fibration de Serre si et seulement si $S(f)$ est une fibration de Kan.*

2. La réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre[17].

Comme $|F^n(k)| = \{(t_0, \ldots, t_n) \in D^n | \exists i \neq k \quad t_i = 0\} \hookrightarrow D^n = |\Delta^n|$ ($|F^n(k)|$ est le « bord de D^n privé de sa k-ième face »[18]) est isomorphe, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, à $D^n \hookrightarrow D^n \times [0,1]$, toute fibration de Serre f a la propriété de relèvement à droite relativement à $|F^n(k)| \hookrightarrow D^n$, et la proposition 15 montre que $S(f)$ est alors une fibration de Kan.

Pour la réciproque et 2 (résultat plus difficile dû à Quillen), nous renvoyons à [21], ch. I.

En appliquant le deuxième point, on voit qu'une fibration de Kan entre ensembles simpliciaux pointés donne lieu à une suite exacte longue d'homotopie (qui est celle de sa réalisation géométrique).

Proposition 18 *En prenant comme fibrations les fibrations de Kan, comme cofibrations les morphismes injectifs*[19] *d'ensembles simpliciaux et comme équivalences faibles les $X \xrightarrow{f} Y$ qui induisent, pour tout choix de point de base dans X et tout $n \in \mathbb{N}$, un isomorphisme $\pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ (i.e. $|f|$ est une équivalence faible de* **Top***), on munit* **S** *d'une structure de catégorie de modèles fermée.*

Voir [21] pour la démonstration.

Nous supposerons désormais **S** munie de cette structure.

Notons que tout ensemble simplicial est cofibrant, et que la proposition 17 montre que pour tout espace topologique X, $S(X)$ est fibrant.

Proposition 19 *Soient $X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} Z$ des flèches de* **S**. *On suppose que p et $q \circ p$ sont des fibrations et que p est surjective. Alors q est une fibration.*

Démonstration : Considérons un problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} F^n(k) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "q"] \\ \Delta^n \arrow[r] & Z \end{tikzcd} \tag{9}$$

Comme p est une fibration surjective, il existe $s \in \hom_{\mathbf{S}}(F^n(k), X)$ tel que $p \cdot s = f$: en effet, pointons $F^n(k)$ de manière arbitraire ; la surjectivité de p permet de trouver un point de base $* \to X$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ F^n(k) \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

mais $* \to F^n(k)$ est une cofibration triviale[20], donc **(CM4)** fournit s.

On peut alors, comme $q \circ p$ est une fibration, trouver dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F^n(k) \arrow[r, "s"] \arrow[d] & X \arrow[d, "q \cdot p"] \\ \Delta^n \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

un relèvement t (i.e. un élément de $\hom_{\mathbf{S}}(\Delta^n, X)$ tel que $q \cdot p \cdot t$ soit $\Delta^n \to Z$ et $F^n(k) \hookrightarrow \Delta^n \xrightarrow{t} X$ coïncide avec $F^n(k) \xrightarrow{s} X$). Alors $p \cdot t$ est une solution au problème de relèvement (9), d'où la conclusion.

Proposition 20 *Les foncteurs $|\cdot|$ et S induisent des isomorphismes réciproques entre* $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ *et* $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$.

Pour une démonstration, voir [21].

Ainsi, d'un point de vue homotopique, il est indifférent[21] de travailler dans l'une ou l'autre des catégories **S** et **Top**, au point que l'on appellera parfois *espaces* les ensembles simpliciaux.

[17] la réciproque est fausse : sinon tout ensemble simplicial serait fibrant.

[18] Une manière rapide de le voir est d'utiliser une « présentation » explicite de $F^n(k)$ — cf. [21], ch. I.

[19] i.e. injectifs en tout degré.

[20] la trivialité provient de ce que $|F^n(k)|$ est contractile — cf. démonstration de la proposition 17.

[21] au niveau des résultats, mais non des démonstrations en général.

Définition 17 *Pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}$, on pose* $\mathbf{Hom}(X,Y)_n = \mathrm{hom}_{\mathbf{S}}(X \times \Delta^n, Y)$. *En utilisant les applications d^i et s^j entre les Δ^n, on fait de $\mathbf{Hom}(X,Y)$ un ensemble simplicial.*

Proposition 21 *Avec la définition précédente,* $\mathbf{S}$ *devient une catégorie de modèles simpliciale.*

Nous renvoyons à [21] pour la démonstration ; signalons simplement que l'on a $A \otimes B = A \times B$ et $\mathbf{hom}_{\mathbf{S}} = \mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}$ avec les notations de la définition 12.

2.2 Groupes simpliciaux et fibrations principales

2.2.1 Actions de groupes simpliciaux

Les groupes simpliciaux coïncident avec les ensembles simpliciaux munis d'une structure de groupe (cf. § 1.1.2). Pour $G \in \mathrm{Ob}\,s\mathbf{Grp}$, on a donc une notion d'ensemble simplicial X muni d'une action de G ; il est clair que se donner une telle action revient à se donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une action du groupe G_n sur l'ensemble X_n de manière à ce que ces actions commutent aux applications de face et de dégénérescence (en un sens évident).

Rappelons que $\mathbf{S}_G$ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux munis d'une action de $G \in \mathrm{Ob}\,s\mathbf{Grp}$.

Proposition 22
1. *Il existe une (unique) structure de catégorie de modèles fermée sur $s\mathbf{Grp}$ dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les flèches f telles que $Ou(f)$ soit une équivalence faible (resp. une fibration), $Ou : s\mathbf{Grp} \to \mathbf{S}$ désignant le foncteur d'oubli.*
2. *Pour $G \in \mathrm{Ob}\,s\mathbf{Grp}$, il existe une (unique) structure de catégorie de modèles fermée sur $\mathbf{S}_G$ dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont les flèches f telles que $Ou(f)$ soit une équivalence faible (resp. une fibration), $Ou : \mathbf{S}_G \to \mathbf{S}$ désignant le foncteur d'oubli. Cette catégorie de modèles fermée peut être complétée en une catégorie de modèles simpliciale pour laquelle $A \otimes X$ (où $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}_G$ et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}$) est l'ensemble simplicial $A \times X$ muni de l'action $g \cdot (a,x) = (g \cdot a, x)$.*

Nous admettrons ces propriétés, dont une démonstration (essentiellement formelle : elle découle facilement de résultats généraux d'existence de structures de catégories de modèles fermées ou simpliciales) est donnée dans [21].

Désormais, dans toute cette section, on se donne un groupe simplicial G.

Les catégories $s\mathbf{Grp}$ et $\mathbf{S}_G$ seront systématiquement munies de ces structures.

Proposition 23 *Soit $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}_G$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n agisse librement sur X_n. Alors la projection canonique $X \to X/G$ est une fibration (de $\mathbf{S}$).*

Corollaire 1 *Un morphisme surjectif de groupes simpliciaux est une fibration.*

En effet un tel morphisme de source F et de noyau G est isomorphe à la projection $F \to F/G$ [22], et un groupe agit toujours librement sur un sur–groupe.

Proposition 24 *Un objet X de $\mathbf{S}_G$ est cofibrant si et seulement si G_n agit librement sur X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Pour la démonstration des propositions 23 et 24, voir [21].

Proposition 25 *Soit $f : X \to Y$ une flèche de $\mathbf{S}_G$, avec Y cofibrant. Si f induit un isomorphisme $X/G \xrightarrow{\tilde{f}} Y/G$, alors f est un isomorphisme.*

Démonstration : – f est injective : soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in X_n$ avec $f(a) = f(b)$. Il existe $g \in G_n$ ($\tilde{f}$ est injective) tel que $b = g \cdot a$; donc $f(a) = f(b) = g \cdot f(a)$, d'où $g = 1$ (G_n agit librement sur X_n) et $a = b$.
– f est surjective : soient $n \in \mathbb{N}$ et $y \in Y_n$. Comme $\tilde{f}$ est surjective, il existe $x \in X_n$ et $g \in G_n$ tels que $f(x) = g \cdot y$. Alors $y = f(g^{-1} \cdot x)$, d'où le résultat.

[22] car un morphisme bijectif de groupes simpliciaux est un isomorphisme (vérification immédiate), à la différence de ce qui se passe pour les groupes topologiques.

2.2.2 Fibrations principales

Dans ce paragraphe et le suivant, on se fixe un groupe simplicial G.

Définition 18 *On appelle G-**fibration principale** une fibration isomorphe à une fibration du type $X \to X/G$, où $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}_G$ est cofibrant*[23].

Il revient au même de dire que la source A est un G-ensemble simplicial cofibrant, que G agit trivialement sur le but (appelé aussi base) B et que le morphisme induit $A/G \to B$ est un isomorphisme.

Pour tout ensemble simplicial B, les G-fibrations principales de base B forment une sous–catégorie pleine, que l'on notera $F_G(B)$, de $(\mathbf{S}_G)_B$. La proposition 25 montre que toutes les flèches de $F_G(B)$ sont des isomorphismes.

F_G définit en fait un *foncteur contravariant* : pour $f \in \hom_{\mathbf{S}}(B, B')$ on a un foncteur d'*image réciproque par f* $f^* : F_G(B') \to F_G(B)$ qui a une G-fibration principale $X' \xrightarrow{p} B'$ associe f^*p défini par le diagramme commutatif cartésien (dans $\mathbf{S}$, puis dans $\mathbf{S}_G$ par la construction ci–après)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle f^*p}\big\downarrow & & {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

X étant muni de la G-action donnée par $g \cdot (b, t) = (b, g \cdot t)$ pour tous $b \in B$ et $t \in X'$ tels que $f(b) = p(t)$: cela fait bien de X un objet cofibrant de $\mathbf{S}_G$ (cf. proposition 24), et f^*p est isomorphe à $X \to X/G$.

On note $EF_G(B)$ l'ensemble[24] des classes d'équivalence d'objets de $F_G(B)$. La fonctorialité contravariante décrite ci–dessus s'étend à $EF_G(B)$.

Proposition 26 *Deux morphismes de $\mathbf{S}$ homotopes $f, g : B \to B'$ induisent la même application $f^* = g^* : EF_G(B') \to EF_G(B)$.*

Démonstration : Soit $h : B \times \Delta^1 \to B'$ une homotopie de f à g ($h \circ d^0 = f,\ h \circ d^1 = g$) : on a $f^* = (d^0)^* \circ h^*$ et $g^* = (d^1)^* \circ h^*$, donc il suffit de prouver que pour toute fibration principale $X \xrightarrow{\varphi} B \times \Delta^1$, $(d^0)^*\varphi$ et $(d^1)^*\varphi$ sont isomorphes.

Dans le diagramme commutatif cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle (d^0)^*\varphi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ B & \xrightarrow{d^0} & B \times \Delta^1 \end{array}$$

Y est cofibrant dans $\mathbf{S}_G$, donc $Y \xrightarrow{d^0} Y \times \Delta^1$ est une cofibration triviale de $\mathbf{S}_G$ (par les propositions 10 et 22-2), d'où par **(CM4)** $u \in \hom_{\mathbf{S}_G}(Y \times \Delta^1, X)$ tel que $u \circ d^0 = \alpha$ et $\varphi \circ u = (d^0)^*\varphi \times id_{\Delta^1}$. On a donc
$u \in \hom_{F_G(B \times \Delta^1)}(Y \times \Delta^1 \xrightarrow{(d^0)^*\varphi \times id_{\Delta^1}} B \times \Delta^1, X \xrightarrow{\varphi} B \times \Delta^1)$, donc u est en fait (par la proposition 25) un isomorphisme de fibrations principales ; en raisonnant de même avec le diagramme cartésien commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle (d^1)^*\varphi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ B & \xrightarrow{d^1} & B \times \Delta^1 \end{array}$$

on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y \times \Delta^1 & \xrightarrow{\simeq} & Y' \times \Delta^1 \\ {\scriptstyle (d^0)^*\varphi \times id_{\Delta^1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (d^1)^*\varphi \times id_{\Delta^1}} \\ B \times \Delta^1 & = & B \times \Delta^1 \end{array}$$

En « projetant parallèlement à Δ^1 », on trouve l'isomorphisme cherché entre $(d^0)^*\varphi$ et $(d^1)^*\varphi$.

[23] on sait (cf. paragraphe précédent) que le morphisme $X \to X/G$ est alors forcément une fibration.

[24] cela a un sens car $F_G(B)$ est une catégorie essentiellement petite, comme le montreront les considérations du paragraphe suivant.

2.2.3 Le théorème de classification

Appliquons à présent l'axiome **(CM5)**b à la flèche $\varnothing \to *$ de $\mathbf{S}_G$: on obtient un objet cofibrant EG de $\mathbf{S}_G$ tel que $EG \to *$ soit une fibration triviale[25] ; on pose $BG = EG/G$: on obtient une fibration principale $EG \xrightarrow{u} BG$. Par la proposition 19 (appliquée à $EG \xrightarrow{u} BG \to *$), on voit que BG est un ensemble simplicial fibrant. La proposition 26 prouve que pour tout $B \in \operatorname{Ob} \mathbf{S}$ l'application $\hom_{\mathbf{S}}(B, BG) \to F_G(B) \quad f \longmapsto f^*u$ induit une application[26] $\pi(B, BG) \to EF_G(B)$. Cela définit même une transformation naturelle $\pi(\cdot, BG) \xrightarrow{\Phi} EF_G$.

Proposition 27 *Φ est un isomorphisme de foncteurs.*

Démonstration : On définit une transformation naturelle Ψ par $\Psi_B : EF_G(B) \to \pi(B, BG)$ comme suit. Soit $X \to B$ une fibration principale : X est cofibrant dans $\mathbf{S}_G$ donc, $EG \to *$ étant une fibration triviale, il existe $\alpha \in \hom_{\mathbf{S}_G}(X, EG)$ unique à homotopie près (proposition 12), et on définit l'image par Ψ_B de la classe de $X \to B$ dans $EF_G(B)$ comme étant la classe d'homotopie de l'application induite par α (celle-ci ne dépend ni du choix de α — car ce morphisme est unique à homotopie près, ni de celui de $X \to B$ dans une classe d'isomorphisme de façon évidente). On va montrer que Ψ_B et Φ_B sont inverses l'une de l'autre.
– $\Psi_B \Phi_B = id$: soient $B \to BG$ une flèche de $\mathbf{S}$ représentant un élément a de $\pi(B, BG)$ et $X \to B$ une fibration principale représentant $\Phi_B(a)$; on a un diagramme commutatif dans $\mathbf{S}_G$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & EG \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow u \\ B & \longrightarrow & BG \end{array} \tag{10}$$

donc par construction de Ψ_B on a bien $\Psi_B \Phi_B(a) = a$.
– $\Phi_B \Psi_B = id$: soient $X \to B$ une fibration principale représentant un élément t de $EF_G(B)$ et $B \to BG$ un élément de $\hom_{\mathbf{S}}(B, BG)$ représentant $\Psi_B(t)$; on a un diagramme commutatif (10), donc si $\Phi_B \Psi_B(t)$ est représenté par une fibration principale $X' \to B$, on a (par la propriété universelle du foncteur image réciproque) un diagramme commutatif dans $\mathbf{S}_G$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ B & =\!= & B \end{array}$$

d'où par la proposition 25 $\Phi_B \Psi_B(t) = t$ et la conclusion.

2.3 Tours de Postnikov et espaces nilpotents

2.3.1 Tour de Postnikov d'une fibration

Pour $X \in \operatorname{Ob} \mathbf{S}$, on notera (X) l'objet de $\mathbf{To}(\mathbf{S})$ défini par la suite constante en X.

Définition 19 *Soit $f : X \to Y$ une fibration de $\mathbf{S}$. On appelle **tour de Postnikov** pour f un objet $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{To}(\mathbf{S})$ muni de morphismes $i : (X) \to (T_n)$ et $p : (T_n) \to (Y)$ tels que, pour tout choix de point de base dans X et tout $n \in \mathbb{N}$*

1. *$p_n i_n = f$,*
2. *$(i_n)_* : \pi_k X \to \pi_k T_n$ est un isomorphisme pour $k \leq n$,*
3. *$(p_n)_* : \pi_k T_n \to \pi_k Y$ est un isomorphisme pour $k > n + 1$,*
4. *on a une suite exacte $0 \to \pi_{n+1} T_n \xrightarrow{(p_n)_*} \pi_{n+1} Y \xrightarrow{\partial} \pi_n F$ où F est la fibre de f et ∂ l'homomorphisme de liaison de la suite exacte longue d'homotopie de f.*

Une tour de Postnikov pour un ensemble simplicial fibrant X est par définition une tour de Postnikov de la fibration $X \to *$.

Ainsi, une tour de Postnikov pour un espace fibrant X est une tour (T_n) munie d'un morphisme $(X) \xrightarrow{i} (T_n)$ tel que, pour tout choix de point de base dans X, $(i_n)_* : \pi_k X \to \pi_k T_n$ soit un isomorphisme pour $k \leq n$ et $\pi_k T_n = 0$ pour $k > n$ (on « approche » X par des espaces n'ayant qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non triviaux).

La construction explicite donnée ci-dessous fournit la *tour de Moore–Postnikov* de f.

[25] cet objet n'est pas unique (il l'est cependant à homotopie près) ; un procédé fonctoriel explicite de construction d'un tel objet est donné dans [21], ch. V, §4.

[26] rappelons que, pour A cofibrant et X fibrant, on désigne par $\pi(A, X)$ l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes $A \to X$.

Définition 20 *Soit $f : X \to Y$ une fibration de* **S** *avec Y fibrant. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation d'équivalence $\mathcal{R}_n$ sur X par : $a \mathcal{R}_n b$ si et seulement si a et b sont de même degré k (i.e. $a, b \in X_k$), $f(a) = f(b)$ et les applications $\Delta^k \to X$ correspondant à a et b respectivement par l'isomorphisme* (8) *coïncident sur $\mathrm{sk}_n \Delta^k$. On pose $T(n) = X/\mathcal{R}_n$: les flèches évidentes $T(n+1) \to T(n)$ font de $(T(n))$ une tour, et l'on a des morphismes canoniques $X \xrightarrow{i_n} T(n)$ et $T(n) \xrightarrow{p_n} Y$ (p_n est induite par f) qui donnent des morphismes de tours $(X) \xrightarrow{i} (T(n))$ et $(T(n)) \xrightarrow{p} (Y)$.*

Proposition 28 *Si $f : X \to Y$ est une fibration entre ensembles simpliciaux fibrants, la tour $(T(n))$ et les morphismes définis ci-avant forment une tour de Postnikov pour f. De plus, les flèches $T(n+1) \to T(n)$ sont des fibrations et le morphisme canonique $X \to \varprojlim T(n)$ est un isomorphisme.*

On renvoie à [21] pour la démonstration ; remarquons tout de même que le point 1 de la définition est évident, que les i_n sont des fibrations (vérification aisée à partir de la définition) surjectives, donc la proposition 19 montre que les $T(n+1) \to T(n)$ sont des fibrations ; enfin, comme tout ensemble simplicial E est engendré par les (i.e. limite inductive des) $\mathrm{sk}_n E$, la dernière assertion est claire.

Remarques :

- La définition d'une tour de Postnikov fait aussi sens dans la catégorie de modèles fermée **Top** ; le théorème d'existence y est exact pour une fibration entre complexes cellulaires.
- On a une propriété d'unicité (à homotopie près) d'une tour de Postnikov pour un ensemble simplicial fibrant *connexe*. Pour plus de détails, voir [21].
- Soit $\mathcal{H}_c$ (resp. $\mathcal{F}_n$ — où $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_f$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ formée des types d'homotopies d'espaces connexes (resp. connexes et dont les π_k sont nuls pour $k > n$, connexes et dont les π_k sont nuls sauf un nombre fini). La construction de Moore–Postnikov fournit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un foncteur $T_n : \mathcal{H}_c \to \mathcal{F}_n$ (à un espace on associe le n-ième « étage » de sa tour de Moore–Postnikov) qui est une localisation : en effet, pour $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{H}_c$ et $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}_n$, $i_n(Y) : Y \to T_n(Y)$ (morphisme naturel fournit dans la tour de Postnikov de Y) est un isomorphisme (conséquence de la propriété d'unicité homotopique mentionnée ci–avant), donc tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ se factorise en $X \xrightarrow{i_n(X)} T_n(X) \xrightarrow{i_n(Y)^{-1} \cdot T_n(f)} Y$; l'unicité résulte en fait de l'existence : il s'agit de voir que deux applications homotopes $f, g : X \to Y$ ont des relèvements (lesquels sont uniques car $i_n(X)$ est surjective) homotopes ; pour cela on applique l'existence à l'homotopie $X \times \Delta^1 \to Y$. La remarque 5 du §1.4 montre donc que le foncteur de Moore–Postnikov $(T_n) : \mathcal{H}_c \to \mathbf{To}(\mathcal{H}_f) \hookrightarrow \mathrm{pro} - \mathcal{H}_f$ est une complétion.

2.3.2 L'action de groupe homotopique associée à une fibration

Soit $X \xrightarrow{p} Y$ une fibration pointée de **S** de fibre F ; on va définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une action de $\pi_1 X$ sur $\pi_n F$.

Soient $g \in \pi_1 X$ représenté par un lacet $\gamma : [0,1] \to |X|$ et $a \in \pi_n F$ représenté par une application continue [27] $\alpha : \mathbb{S}^n \to |F|$. Considérons le diagramme commutatif de **Top**

$$\begin{array}{ccc} \{0\} \times \mathbb{S}^n \cup [0,1] \times \{*\} & \xrightarrow{f} & |X| \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle |p|} \\ [0,1] \times \mathbb{S}^n & \xrightarrow{g} & |Y| \end{array} \tag{11}$$

où $*$ désigne le point de base de $\mathbb{S}^n$, i l'inclusion, $f(0,\cdot) = \alpha$, $f(\cdot,*) = \gamma$ et $g(t,x) = (|p| \circ \gamma)(t)$. Si $h : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to |X|$ est un relèvement (i.e. une application continue telle que $h \circ i = f$ et $|p| \circ h = g$), on définit $g \cdot a$ comme la classe d'homotopie de $h(1,\cdot) : \mathbb{S}^n \to |F|$ (cette application est à valeurs dans $|F|$ et respecte les points de base).

Cela a bien un sens car h existe et est unique à homotopie (à valeurs dans $|F|$ et respectant les points de base) près : en effet, par la proposition 15 trouver un tel relèvement équivaut à trouver un relèvement dans le diagramme commutatif de **S**

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 \times \mathrm{sk}_n \Delta^{n+1} \cup \Delta^1 \times \Delta^0 & \longrightarrow & S|X| \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle S(|p|)} \\ \Delta^1 \times \mathrm{sk}_n \Delta^{n+1} & \longrightarrow & S|Y| \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est l'inclusion donnée par $d^0 \times id \cup id \times *$ ($*$ étant le point de base de $\mathrm{sk}_n \Delta^{n+1}$), donc une cofibration, qui est triviale parce que i est une équivalence d'homotopie [28], et $S(|p|)$ est une fibration par la

[27] où $\mathbb{S}^n$ désigne la sphère unité de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^{n+1}$.

[28] on aurait aussi pu montrer directement que i est une cofibration triviale en prouvant explicitement que c'est une rétraction par déformation forte.

proposition 17, donc **(CM4)** montre l'existence de h, et la proposition 12 son unicité à homotopie près (en un sens fort).

Il est enfin clair que l'on obtient bien ainsi une action du groupe[29] $\pi_1 X$ sur le groupe $\pi_n F$.

Remarques :

- on a de même une action du groupe fondamental de l'espace total d'une fibration pointée de **Top** sur les groupes d'homotopie de sa fibre ; on vérifie que dans le cas de la fibration $X \to *$ elle coïncide avec l'action usuelle de $\pi_1 X$ sur $\pi_n X$ (décrite dans [44], ch. 7, § 3 par exemple ; elle coïncide avec la conjugaison pour $n = 1$).
- Si $X \to X/G$ est une fibration G-principale, l'action explicitée ci–avant est triviale : en effet, avec les notations ci–dessus, si l'on note $\tilde{\alpha}$ l'application $\mathrm{sk}_n \Delta^{n+1} \to G$ telle que $|\tilde{\alpha} \cdot *| = \alpha$[30], l'application h telle que pour tout $u \in \mathbb{S}^n$ $h(\cdot, u) = |\tilde{\alpha} \cdot \gamma|$ est un relèvement dans (11). En particulier, l'action du groupe fondamental d'un groupe simplicial sur ses groupes d'homotopie (i.e. l'action correspondant à la fibration $G \to *$ — cf. remarque précédente) est triviale (de même que pour un H-espace).

2.3.3 Fibrations et espaces nilpotents

Définition 21 *Soit G un groupe muni d'une action d'un groupe G' (i.e. d'une action sur l'ensemble G telle que les applications $G \to G \quad g \longmapsto a \cdot g$ soient des morphismes de groupes pour tout $a \in G'$[31]). On dit que l'action de G' sur G est* ***nilpotente*** *s'il existe une suite décroissante finie $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous-groupes de G telle que*

1. *$H_0 = G, \quad H_n = \{1\}$,*
2. *pour tout i, H_i est stable par l'action de G',*
3. *pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad H_{i+1} \lhd H_i$, et l'action de G' induite sur H_i/H_{i+1} est triviale.*

Ainsi, un groupe est nilpotent si et seulement s'il agit sur lui–même par automorphismes intérieurs de manière nilpotente.

On montre facilement (de manière tout à fait analogue à la preuve qu'une extension d'un groupe nilpotent par un groupe nilpotent est nilpotente) le résultat suivant :

Proposition 29 *Soit $\cdots \to B_n \to A_n \to C_n \to B_{n-1} \to \cdots \to B_0 \to A_0 \to C_0 \to \{1\}$ une suite exacte de groupes, G un groupe agissant sur les A_n, B_n, C_n de telle sorte que les morphismes de la suite exacte soient compatibles aux actions. Si G agit de manière nilpotente sur deux des trois suites de groupes (A_n), (B_n), (C_n), il agit de façon nilpotente sur l'autre.*

Dans la définition ci–après, le terme espace désigne un ensemble simplicial ou un espace topologique.

Définition 22 *Une fibration pointée entre espaces connexes est dite* ***nilpotente*** *si sa fibre F est connexe*[32] *et si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'action du groupe fondamental de l'espace total sur $\pi_n F$ est nilpotente.*

Un espace fibrant X est dit nilpotent si la fibration $X \to *$ l'est.

X est donc nilpotent lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'action de $\pi_1 X$ sur $\pi_n X$ est nilpotente, ce qui fait sens même pour un espace non fibrant.

Un cas évident de fibration nilpotente est celui où l'action associée est triviale ; ceci est en particulier le cas quand l'espace total est simplement connexe ou quand la fibration est principale avec une fibre connexe (cf. remarque du paragraphe précédent). Le corollaire ci-après généralise ce cas.

Proposition 30 *Soient $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ des fibrations pointées entre espaces connexes. On suppose que les fibres F et G de f et g respectivement sont connexes. Si deux des trois fibrations f, g et gf sont nilpotentes, la troisième l'est également.*

[29] la définition de l'action d'un groupe sur un autre groupe est rappelée dans le paragraphe suivant.

[30] où $*$ désigne le point de base de X.

[31] On remarquera que cette notion (qui est la notion usuelle d'action d'un groupe sur un autre) n'entre pas dans le cadre de la définition 3, plus adaptée à des situations de type topologique comme celle d'action d'un groupe simplicial déjà rencontrée.

[32] dans le cas topologique, il faut entendre connexe au sens de connexe par arcs ; pour les ensembles simpliciaux, une telle distinction n'a pas lieu d'être : on vérifie aussitôt qu'un ensemble simplicial est connexe (au sens où il n'est pas isomorphe à une somme non triviale) si et seulement s'il est connexe par arcs (au sens où son π_0 est trivial — i.e. sa réalisation géométrique est connexe par arcs).

Démonstration : Soit H la fibre de gf : H est connexe[33]. f induit une fibration $H \xrightarrow{\tilde{f}} G$ de fibre F (en effet le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow f \\ G & \longrightarrow & Y \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les inclusions, est cartésien), d'où une suite exacte d'homotopie

$$\cdots \to \pi_n F \to \pi_n H \to \pi_n G \to \pi_{n-1} F \to \cdots .$$

$\pi_1 X$ agit sur les $\pi_n F$ (via la fibration f), les $\pi_n H$ (via la fibration gf) et les $\pi_n G$ (via le morphisme $f_* : \pi_1 X \to \pi_1 Y$ et la fibration g), et la naturalité de la construction du paragraphe précédent montre que les morphismes de la suite exacte ci-dessus sont compatibles aux actions. Pour conclure, il suffit d'appliquer la proposition 29 et de remarquer que la surjectivité du morphisme $f_* : \pi_1 X \to \pi_1 Y$ (due à la connexité de F et à la suite exacte d'homotopie de f) entraîne que g est nilpotente si et seulement si l'action de $\pi_1 X$ sur les $\pi_n G$ l'est.

Corollaire 2 *Soit (T_n) une tour d'ensembles simpliciaux connexes telle que les morphismes $T_n \to T_{n-1}$ soient des fibrations principales associées à des groupes simpliciaux connexes ayant des π_k triviaux pour $k < n$. Alors l'application canonique $\varprojlim T_n \to T_0$ est une fibration nilpotente.*

(on pourrait évidemment remplacer les fibrations principales par des fibrations niplotentes dont les fibres ont la même propriété homotopique)

Démonstration : La proposition 5-2 implique que ce morphisme est une fibration ; l'hypothèse sur les groupes d'homotopie montre que les morphismes canoniques $\varprojlim T_n \to T_i$ induisent des isomorphismes entre les π_k pour $k \leq i$, donc que l'action de $\pi_1 \varprojlim T_n$ sur $\pi_k F$ (où F désigne la fibre, qui est connexe, de la fibration en question) s'identifie à celle de $\pi_1 T_k$ sur $\pi_k T_0$ venant de la fibration $T_k \to T_0$, laquelle est nilpotente par la proposition ci–avant.

Il est remarquable que l'on dispose d'une réciproque, que nous admettrons (pour une démonstration, voir [10]) :

Proposition 31 *Soit (T_n) la tour de Moore–Postnikov d'une fibration nilpotente entre ensembles simpliciaux fibrants connexes. Les fibrations $T_{n+1} \to T_n$ peuvent s'écrire à homotopie près comme des composées de fibrations principales associées à des groupes simpliciaux abéliens connexes dont les π_k sont triviaux pour $k \neq n$.*

2.4 Modules simpliciaux et homologie

Dans cette sous–section, on se donne un anneau A.

2.4.1 Homologie d'un A-module simplicial

Soit X un A-module simplicial (i.e. un objet de $s\mathbf{Mod}_A$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $(\mathcal{N}X)_n = \{x \in X_n \,|\, \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \quad d_i(x) = 0\}$: c'est un sous-A-module de X_n ; les identités (7) montrent que $(-1)^n d_n$ induit un morphisme $(\mathcal{N}X)_n \to (\mathcal{N}X)_{n-1}$ (si $x \in (\mathcal{N}X)_n$, pour $i < n-1$, $d_i d_n(x) = d_{n-1} d_i(x) = 0$). Cela définit sur $\mathcal{N}X$ une structure de *complexe de chaînes* de A-modules nuls en degré < 0 (si l'on convient que $(\mathcal{N}X)_n = 0$ pour $n < 0$ — nous noterons $\mathbf{Ch}_A^+$ la catégorie de ces complexes) : en effet si $x \in (\mathcal{N}X)_{n+1}$, on a $d_n d_{n+1} x = d_n d_n x = 0$. On définit en fait ainsi un foncteur $\mathcal{N} : s\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ch}_A^+$.

On définit un autre foncteur $\mathcal{M} : s\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Ch}_A^+$ comme suit. Pour $X \in \operatorname{Ob} s\mathbf{Mod}_A$ on pose $(\mathcal{M}X)_n = X_n$, et l'on prend comme différentielle $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i \in \hom_{\mathbf{Mod}_A}(X_n, X_{n-1})$ — on a bien

$$\begin{aligned} \partial_n \partial_{n+1} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n+1}} (-1)^{i+j} d_i d_j \quad &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} d_i d_j + \sum_{0 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} d_{j-1} d_i \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq n} (-1)^{i+j} d_i d_j + \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} (-1)^{k+l+1} d_l d_k = 0 \,. \end{aligned}$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(X)$ le n-ième A-module d'homologie de $\mathcal{M}X$[34].

On trouvera dans [21] une démonstration des résultats élémentaires suivants ; notons que dans le premier on pourrait remplacer $\mathbf{Mod}_A$ par n'importe quelle catégorie abélienne ; la démonstration du second utilise le premier.

[33] en effet, soient a un point fixé de $F \subset H$ et x un point quelconque de H. Comme G est connexe, on peut joindre $f(x)$ à $f(a)$ par un chemin dans G ; en relevant ce chemin on obtient un chemin dans H de x à un point de F, comme F est connexe on peut donc joindre x à a par un chemin de H.

[34] ce complexe est appelé *complexe de Moore* associé à X.

Proposition 32 *Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, s\mathbf{Mod}_A$, l'inclusion $\mathcal{N}X \hookrightarrow \mathcal{M}X$ est une équivalence d'homotopie (au sens des complexes) naturelle en X. En particulier, elle induit un isomorphisme canonique $H_n(X) \simeq H_n(\mathcal{N}X)$.*

Proposition 33 *Soit G un A-module simplicial.*

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la structure de A-module de G_n induit une structure de A-module sur $\pi_n G$ (G étant pointé par son élément neutre), dont l'addition coïncide pour $n \geq 1$ avec la loi de groupe d'homotopie.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une application A-linéaire canonique $G_n \to H_n(G)$ qui induit un isomorphisme (canonique) $\pi_n G \simeq H_n(G)$.*

2.4.2 Les foncteurs L_A, C_A et $\widetilde{L}_A$

On a construit au paragraphe 1.4 des foncteurs $\mathbf{Ens} \xrightarrow{l_A} \mathbf{Mod}_A$, $\mathbf{Ens} \xrightarrow{c_A} \mathbf{Aff}_A$ et $\mathbf{Ens}^* \xrightarrow{\tilde{l}_A} \mathbf{Mod}_A$. Par composition, ils donnent des foncteurs $L_A : \mathbf{S} \to s\mathbf{Mod}_A$ (défini par $L_A(X) = \Delta^{op} \xrightarrow{X} \mathbf{Ens} \xrightarrow{l_A} \mathbf{Mod}_A$), $C_A : \mathbf{S} \to s\mathbf{Aff}_A$ et $\widetilde{L}_A : \mathbf{S}^* \to s\mathbf{Mod}_A$.

Proposition 34 *Les foncteurs $L_A : \mathbf{S} \to s\mathbf{Mod}_A$, $C_A : \mathbf{S} \to s\mathbf{Aff}_A$ et $\widetilde{L}_A : \mathbf{S}^* \to s\mathbf{Mod}_A$ sont adjoints à gauche respectifs aux foncteurs d'oubli correspondants (i.e. ce sont des localisations).*

Cela résulte de la propriété analogue des foncteurs $\mathbf{Ens} \xrightarrow{l_A} \mathbf{Mod}_A$, $\mathbf{Ens} \xrightarrow{c_A} \mathbf{Aff}_A$ et $\mathbf{Ens}^* \xrightarrow{\tilde{l}_A} \mathbf{Mod}_A$; de même, pour tout ensemble simplicial pointé X, la composée $C_A(X) \hookrightarrow L_A(X) \to \widetilde{L}_A(X)$ est un isomorphisme comme dans le cas des ensembles pointés.

La proposition ci–dessus, jointe à une construction du paragraphe 1.1.3, fournit aussitôt :

Proposition 35 *Si l'on note encore L_A le foncteur $\mathbf{S} \to \mathbf{S}$ obtenu à partir de L_A par composition à gauche avec le foncteur d'oubli, on a des transformations naturelles $\varphi : id \to L_A$ et $\psi : L_A^2 \to L_A$ telles que (L_A, φ, ψ) soit une monade. On a des résultats analogues avec C_A et $\widetilde{L}_A$ (les transformations naturelles correspondantes seront encore notées, par abus, φ et ψ).*

2.4.3 Homologie et cohomologie singulières d'un ensemble simplicial

Définition 23 *Soit X un ensemble simplicial. On appelle (pour tout $n \in \mathbb{N}$)* ***n-ième A-module d'homologie (singulière)*** *de X, et l'on note $H_n(X; A)$, le A-module $H_n(L_A(X))$. L'**homologie réduite à coefficients dans** A de X est par définition en degré n le noyau du morphisme canonique $H_n(X; A) \to H_n(*; A)$, que l'on note $\widetilde{H}_n(X; A)$.*

Remarques :

- on a $H_n(*; A) = A$ si $n = 0$, 0 sinon, donc $\widetilde{H}_n(X; A)$ ne diffère de $H_n(L_A(X))$ que pour $n = 0$.
- si X est pointé, $\widetilde{H}_n(X; A)$ s'identifie naturellement à $H_n(\widetilde{L}_A(X))$ (car $L_A(*)$ est facteur direct dans $L_A(X)$).
- si E est un espace topologique, l'homologie singulière de E est *par définition* celle de $S(E)$.

En utilisant la proposition 33, on obtient, pour tout ensemble simplicial pointé X, un morphisme canonique $\pi_n(X) \to \widetilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ (composé de $\pi_n(X) \xrightarrow{(\varphi_X)_*} \pi_n(L_A(X))$ — où φ désigne la transformation naturelle introduite au paragraphe précédent — et de l'isomorphisme canonique $\pi_n(L_{\mathbb{Z}}(X)) \simeq \widetilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$), appelé *morphisme de Hurewicz* — on vérifie en effet qu'il s'identifie au morphisme de Hurewicz (topologique) de $|X|$; en particulier le théorème de Hurewicz est encore valable dans le cadre simplicial (cf. [21], chapitre III, où l'on en trouvera une démonstration « simpliciale »). Le morphisme $\pi_n(X) \to \widetilde{H}_n(X; A)$ (composé du précédent et du morphisme canonique $\widetilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) \to \widetilde{H}_n(X; A)$ induit par $\widetilde{L}_{\mathbb{Z}}(X) \to \widetilde{L}_A(X)$) sera aussi appelé morphisme de Hurewicz. Un théorème classique de Whitehead (corollaire du théorème de Hurewicz — cf. [44], ch. 7, §5 pour le cas topologique, identique) montre qu'une équivalence faible induit un isomorphisme en homologie ; les foncteurs H_n et $\widetilde{H}_n$ se factorisent donc à travers la catégorie $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ (proposition 9), et L_A, C_A et $\widetilde{L}_A$ induisent des foncteurs de $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ (éventuellement pointée) dans elle-même.

Définition 24 *La* ***cohomologie (singulière)*** *d'un ensemble simplicial X est définie comme la cohomologie du dual de $L_A(X)$ [35] (i.e. du complexe égal en degré n à A^{X_n}, les différentielles étant les transposées de celles du complexe de Moore). On note $H^n(X; A)$ le n-ième A-module de cohomologie de X.*

[35] celui–ci est un A-module *co*simplicial ; les définitions du § 2.4.1 s'adaptent aussitôt à ce cas.

La définition de $H^n(X;A)$ fait sens pour tout groupe abélien A.

On a des remarques analogues aux précédentes à propos de la cohomologie.

Si A est un corps commutatif k, le foncteur de dualisation est exact, donc $H^n(X;k)$ s'identifie canoniquement à $H_n(X;k)^*$.

2.5 Espaces cosimpliciaux

Nous donnons ici les constructions et propriétés (admises mais élémentaires) nécessaires aux considérations de la section 4, à l'exception de la suite spectrale des espaces cosimpliciaux (exposée en détail dans [10]) qu'utilisent quelques théorèmes essentiels que nous admettons. En effet, c'est cette suite spectrale qui permet l'étude homotopique de l'espace total associé à un espace cosimplicial.

2.5.1 Définitions

On appelle *espace cosimplicial* un objet X de $c\mathbf{S}$, que l'on notera généralement $X = (X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Un espace cosimplicial *augmenté* est un tel espace X muni d'une flèche $X^{-1} \xrightarrow{d^0} X^0$ de $\mathbf{S}$ (appelée augmentation) telle que les morphismes d^0d^0 et $d^1d^0 : X^{-1} \to X^1$ coïncident. L'*augmentation maximale* d'un espace cosimplicial X est définie comme le sous-ensemble simplicial $\mathcal{A}_mX$ de X^0 égalisateur des flèches $d^0, d^1 : X^0 \to X^1$ [36].

Les ensembles simpliciaux standard $\Delta^n = \hom_\Delta(\cdot, \mathbf{n})$ munis des morphismes d^i, s^i provenant de Δ constituent un espace cosimplicial, encore noté Δ, dit *espace cosimplicial standard.* Pour $k \in \mathbb{N}$, les inclusions $\mathrm{sk}_k\,\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ fournissent un sous-espace cosimplicial $\Delta^{[k]} = (\mathrm{sk}_k\,\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Δ.

Pour $X \in \mathrm{Ob}\, c\mathbf{S}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $M^nX = \{(x_0,\dots,x_n) \in X^n \times \cdots \times X^n \mid \forall\, 0 \le i < j \le n \quad s^ix_j = s^{j-1}x_i\} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}$ et on pose $M^{-1}X = *(\in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S})$; on a alors pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ un morphisme (d'ensembles simpliciaux) $s_X : X^{n+1} \to M^nX \quad x \longmapsto (s^0x,\dots,s^nx)$.

Pour $A \in \mathrm{Ob}\, c\mathbf{S}$ et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}$, on définit $A \otimes X \in \mathrm{Ob}\, c\mathbf{S}$ par $(A\otimes X)^n = A^n \times X$, les d^i, s^i étant obtenus à partir de ceux de A. Pour $A, B \in \mathrm{Ob}\, c\mathbf{S}$ on pose $\mathbf{Hom}(A,B)_n = \hom_{c\mathbf{S}}(A\otimes\Delta^n, B)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) ; les applications d^i, s^i entre les Δ^n font de $\mathbf{Hom}(A,B)$ un ensemble simplicial. On définit, pour $X \in \mathrm{Ob}\, c\mathbf{S}$, l'*espace total* $\mathrm{Tot}\, X = \mathbf{Hom}(\Delta, X)$ de X et pour $k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Tot}_k\, X = \mathbf{Hom}(\Delta^{[k]}, X)$ — en particulier $\mathrm{Tot}_0\, X \simeq X^0$ canoniquement. Comme $\Delta = \varinjlim \Delta^{[k]}$, $\mathrm{Tot}\, X = \varprojlim \mathrm{Tot}_k\, X$. On définit enfin, pour tout ensemble simplicial X et tout espace cosimplicial Y, un espace cosimplicial $\mathbf{hom}(X,Y)$ par $\mathbf{hom}(X,Y)^n_k = \hom_{\mathbf{S}}(X\times\Delta^k, Y^n)$ (les applications de structure simpliciale (à n fixé) et cosimpliciale provenant des d^i, s^i entre les Δ^k et les Y^n respectivement).

2.5.2 La catégorie de modèles simpliciale $c\mathbf{S}$

Pour toutes les démonstrations de ce paragraphe, nous renvoyons à [10], chapitre X.

Proposition 36 *On munit $c\mathbf{S}$ d'une structure de catégorie de modèles simpliciale en prenant*
- *comme équivalences faibles les morphismes qui en chaque degré sont des équivalences faibles de $\mathbf{S}$,*
- *comme cofibrations les morphismes injectifs[37] $X \to Y$ qui induisent un isomorphisme entre $\mathcal{A}_mX$ et $\mathcal{A}_mY$,*
- *comme fibrations les morphismes $f : X \to Y$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}\cup\{-1\}$ le morphisme de $\mathbf{S}$ $f_n \times_{s_Y} s_X : X^{n+1} \to Y^{n+1} \times_{M^nY} M^nX$ soit une fibration,*

$\mathbf{Hom}_{c\mathbf{S}}, \otimes$ et $\mathbf{hom}_{c\mathbf{S}}$ étant entendus au sens du paragraphe précédent.

Définition 25 *Un **pseudo–groupe cosimplicial** (resp. **pseudo–A-module cosimplicial**, où A est un anneau) est un espace cosimplicial X tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ X^n soit un groupe (resp. un A-module) simplicial et que, pour $i > 0$, les d^i soient des morphismes de groupes (resp. de A-modules) simpliciaux (on n'exige pas que les d^0 le soient), de même que les s^j pour tout $j \in \mathbb{N}$. Un **morphisme de pseudo–groupes cosimpliciaux** (resp. **morphisme de pseudo–A-modules cosimpliciaux**) est une flèche de $c\mathbf{S}$ entre pseudo–groupes (resp. pseudo–A-modules) cosimpliciaux qui en chaque degré est un morphisme de groupes (resp. A-modules) simpliciaux.*

Proposition 37 *Tout morphisme de pseudo–groupes cosimpliciaux est une fibration dans $c\mathbf{S}$; en particulier, un pseudo–groupe cosimplicial est un espace cosimplicial fibrant.*

Ce résultat est à rapprocher du corollaire 1.

Proposition 38 *Soit X un pseudo–groupe (resp. pseudo–A-module, où A est un anneau) cosimplicial. Le morphisme canonique $\mathrm{Tot}_n\, X \to \mathrm{Tot}_{n-1}\, X$ est pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une fibration principale (resp. une fibration principale de groupe un A-module simplicial).*

[36] ainsi l'inclusion $\mathcal{A}_mX \hookrightarrow X^0$ est une augmentation, et toute augmentation se factorise à travers celle–ci, ce qui justifie la terminologie.

[37] i.e. injectifs en tout degré.

3 Préliminaires topologico–géométriques

Dans les sous–sections 3.1 et 3.2, nous introduisons brièvement les définitions et propriétés élémentaires des fibrations sphériques et de la K–théorie (uniquement pour K^0) en termes desquelles s'énonce la conjecture d'Adams. Contrairement aux notions présentées dans la section précédente, celles–ci se définissent naturellement de façon topologique, et non simpliciale, ce qui nécessite de redéfinir certaines notions (les fibrations principales) dans ce contexte. La plupart des théorèmes exigent des hypothèses de « gentillesse » des espaces, que nous n'avons pas cherché à optimiser — il s'agit des notions d'espace paracompact (i.e. séparé et tel que pour tout recouvrement ouvert, il existe un recouvrement ouvert localement fini plus fin), de k-espace (i.e. séparé et dont la topologie est la plus forte parmi celles induisant la même topologie sur les parties compactes) et d'espace localement contractile (i.e. dont tout point admet un voisinage contractile — nous dénommerons fortement localement contractile un espace dont tout point possède un système fondamental de voisinages contractiles) ; souvent nous nous restreignons aux complexes cellulaires, qui vérifient toutes ces propriétés.

Les notions mises en œuvre sont essentiellement de nature *géométrique* ; il est donc naturel que l'espace classifiant de la K–théorie soit une limite inductive filtrante de variétés *algébriques* (les grassmanniennes) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ — qui sont même définies par des équations à coefficients dans $\mathbb{Q}$. La démonstration de Sullivan de la conjecture d'Adams exploite ce fait ; le reste de cette section est consacré au résultat de géométrie algébrique utilisé dans cette démonstration, le théorème d'isomorphisme entre la cohomologie étale d'une variété algébrique complexe lisse et la cohomologie singulière de sa réalisation topologique pour des groupes de coefficients finis.

Nous en présentons une démonstration élégante due à Serre, qui utilise un « dévissage » des variétés par des « bons voisinages » — notion due à Artin, qui fait l'objet de la sous–section 3.3 — lequel permet de conclure rapidement grâce au théorème d'existence de Riemann généralisé de Grauert–Remmert. Nous exposons cette approche dans 3.4, après une brève présentation du type d'homotopie étale et de l'isomorphisme de Verdier.

Références bibliographiques principales : [14] pour 3.1 ; [7], [25], [2] et [6] pour 3.2 ; [23] et [3] pour 3.3 ; [5], [47] et [3] pour 3.4.

3.1 Compléments sur les fibrations

3.1.1 Fibrations localement banales

Soient X et Y deux espaces topologiques : la projection $X \times Y \to X$ est une fibration de Hurewicz. Une fibration isomorphe à une telle fibration est dite *banale* [38]. Une fibration de Hurewicz $f : X \to B$ est dite *localement banale* s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de B tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$ f induise une fibration banale $f^{-1}(U) \to U$. En fait cette condition locale entraîne automatiquement que f est une fibration de Hurewicz pour peu que B soit paracompact, en vertu du théorème suivant, dû à Hurewicz, que nous admettrons (pour une démonstration, voir par exemple [44], chapitre 2, § 7).

Proposition 39 *Soit $f : X \to B$ une application continue, où B est un espace paracompact. S'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de B tel que pour tout $U \in \mathcal{U}$ f induise une fibration de Hurewicz $f^{-1}(U) \to U$, alors f est une fibration de Hurewicz.*

3.1.2 Cas des fibrations principales

La notion de fibration principale introduite ci–avant pour les ensembles simpliciaux a un analogue topologique [39] : si $p : X \to Y$ est une fibration de Hurewicz et G un groupe topologique (i.e. un objet de $\mathbf{Top_{Grp}}$), on dit que p est une *G-fibration principale* si

- X est muni d'une action (à gauche [40]) de G [41] telle que Y s'identifie à X/G et p à la projection canonique $X \longrightarrow X/G$,
- l'application $G \times X \longrightarrow X \times X \quad (g, x) \longmapsto (x, g \cdot x)$ est un homéomorphisme sur son image (en particulier G agit librement sur X).

Si G est un groupe topologique et B un espace topologique, on notera $F_G(B)$ la sous–catégorie pleine de $(\mathbf{Top}_G)_B$ (B étant muni de l'action triviale de G) formée des G-fibrations principales de base B.

[38] la terminologie usuelle est « triviale » , mais cette notion est différente de celle de fibration triviale introduite dans le cadre des catégories de modèles fermées : une fibration banale est triviale si et seulement si sa fibre est contractile ; une fibration triviale n'est pas en général banale (c'est cependant le cas pour une fibration *principale* par le corollaire 3 du paragraphe suivant).

[39] si les résultats et raisonnements sont pour beaucoup semblables à ceux concernant les fibrations principales simpliciales, il n'est pas possible de déduire immédiatement les résultats topologiques des résultats simpliciaux, car la correspondance n'est pas suffisamment rigide au niveau des *espaces*.

[40] on rencontre souvent la convention de choisir des actions à droite, qui est plus naturelle pour traiter des revêtements par exemple.

[41] au sens usuel (action ensembliste continue), lequel coïncide avec la notion introduite au § 1.1.2.

Proposition 40 *Tout morphisme de $F_G(B)$ est un isomorphisme.*

(cf. proposition 25)
Nous renvoyons à [25] (ch. 4, § 3) pour la démonstration de cette propriété élémentaire.

Corollaire 3 *Une fibration principale est banale si et seulement si elle possède une section.*

En effet si une G-fibration principale $X \xrightarrow{f} B$ a une section s, on a un morphisme dans $F_G(B)$ de la fibration banale $B \times G \to B$ vers f (la composée $B \times G \to B \xrightarrow{s} X$) ; la réciproque est évidente.

Corollaire 4 *Une fibration principale de base contractile (resp. localement contractile) est banale (resp. localement banale).*

Il suffit de traiter le cas d'une fibration principale de base contractile, lequel découle de la proposition précédente (une fibration de Hurewicz — principale ou non — d'espace total non vide et de base B contractile a toujours une section : pour le voir, relever une homotopie de id_B à une application constante).
Ainsi, si B est un espace paracompact localement contractile, les fibrations principales de base B peuvent se décrire par une condition locale.

Introduisons, pour tout groupe topologique G et tout espace topologique B paracompact, comme dans le cas simplicial, l'ensemble $EF_G(B)$ des classe d'équivalence de G-fibrations principales de base B. Les constructions du § 2.2.2 et la proposition 26 s'adaptent au cas topologique [42].

Proposition 41 *Soit G un groupe topologique. Il existe une fibration G-principale $EG \xrightarrow{p} BG$ avec EG contractile. La transformation naturelle $\hom_{\mathbf{Top}}(\cdot, BG) \to F_G \quad f \longmapsto f^*p$ induit pour tout complexe cellulaire B une bijection entre l'ensemble des classe d'homotopie d'applications continues $B \to BG$ et $EF_G(B)$.*

Pour la démonstration, voir par exemple [14].

3.1.3 Homotopie fibrée

Soient B un espace topologique, $X \to B$ et $Y \to B$ deux objets de $\mathbf{Top}_B$. On appelle *homotopie fibrée* entre deux morphismes f et g de $X \to B$ vers $Y \to B$ une homotopie $h : X \times [0,1] \to Y$ de f à g telle que pour tout $t \in [0,1]$ $h(\cdot, t) : X \to Y$ soit un morphisme (dans $\mathbf{Top}_B$) de $X \to B$ vers $Y \to B$. Une *équivalence d'homotopie fibrée* est un morphisme f de $X \to B$ vers $Y \to B$ tel qu'il existe un morphisme g de $Y \to B$ vers $X \to B$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes fibrés à $id_{Y \to B}$ et $id_{X \to B}$ respectivement (pour $B = *$ on retrouve les notions usuelles d'homotopie). Si f est une équivalence d'homotopie fibrée, f induit en particulier une équivalence d'homotopie entre les fibres des applications entre lesquelles il est défini.
Réciproquement, on a le résultat suivant, que nous admettrons (voir [31], § 2 — cela généralise un résultat établi dans [15], lequel nous suffirait en fait essentiellement).

Proposition 42 *Soient X, Y et B des k-espaces, B étant de plus paracompact et localement contractile, $X \xrightarrow{f} B$ et $Y \xrightarrow{g} B$ des fibrations de Hurewicz et $a \in \hom_{\mathbf{Top}_B}(f, g)$. Si pour tout $b \in B$ a induit une équivalence d'homotopie entre les fibres $f^{-1}(\{b\})$ et $g^{-1}(\{b\})$, alors a est une équivalence d'homotopie fibrée* [43].

A partir de cette proposition, on a le résultat suivant, pour lequel nous renvoyons à [14], § 16 :

Proposition 43 *Soit F un espace topologique. Il existe un complexe cellulaire connexe C tel que pour tout complexe cellulaire X, l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence d'homotopie fibrée de fibrations de Hurewicz de base X et dont les fibres ont le type d'homotopie de F soit en bijection naturelle avec l'ensemble $\pi(X, C)$ des classes d'homotopie d'applications continues de X dans C.*

[42] la seule différence pour établir cet analogue de la proposition 26 ou la proposition ci-après réside dans les démonstrations d'existence qui résultent dans le cas simplicial de la structure de catégorie de modèles fermée de la proposition 22 — cf. [25] (ch. 4, § 9) pour une démonstration.
[43] si B est connexe par arcs, la condition est en fait vérifiée pour tout $b \in B$ dès qu'elle l'est pour *un* $b \in B$ vu que f et g sont des fibrations de Hurewicz.

(la bijection s'obtient comme pour les fibrations principales par image inverse (i.e. produit fibré) à partir d'une fibration « universelle » de base C)

Le cas principal qui nous sera utile est celui où F est une sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ [44] ; on montre alors (voir [16]) que l'on peut choisir pour espace classifiant C, de façon analogue au cas des fibrations principales, un complexe cellulaire connexe BG_n tel que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $\pi_i(BG_n) \simeq \pi_{i-1} G_n$, où G_n est l'ensemble des équivalences d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{S}^{n-1}$ (i.e. des applications continues de degré 1 ou -1) muni de la topologie de la convergence uniforme (pour laquelle la composition devient une loi continue — cf. [9], ch. X : G_n est un H-espace associatif, i.e. son image dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ est munie d'une structure de monoïde — cf. § 1.1.2 et [45]). La démonstration repose sur un analogue de la proposition 41 pour des fibrations « principales » associées au H-espace G_n et une correspondance entre ces fibrés et les fibrés dont les fibres ont le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-1}$ (ce qui est tout à fait semblable, en utilisant la proposition 42, à ce que nous détaillerons dans le cadre des fibrés vectoriels — cf. § 3.2.3).

En particulier $\pi_1(BG_n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note BSG_n le revêtement universel de BG_n ; c'est l'espace classifiant des fibrations sphériques orientées [45] (on impose aux homotopies fibrées de respecter l'orientation), qui est l'espace classifiant associé au H-espace associatif avec élément neutre SG_n, composante neutre de G_n [46]. La suspension fournit des applications continues $G_n \to G_{n+1}$ et $SG_n \to SG_{n+1}$ (vu que la suspension préserve le degré), d'où des applications $BG_n \to BG_{n+1}$ et $BSG_n \to BSG_{n+1}$. Ces applications correspondent au niveau des fibrés sphériques à une « suspension fibrée ».

On note $BG_\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} BG_n$ et $BSG_\infty = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} BSG_n$. Ce sont respectivement les espaces classifiants des « fibrations sphériques stables » et des « fibrations sphériques stables orientées » : si X est un complexe cellulaire **fini**, on a $\pi(X, BG_\infty) \simeq \varinjlim_{n\in\mathbb{N}^*} \pi(X, BG_n)$ [47] (et de même pour BSG_∞). On peut munir cet ensemble d'une structure de groupe naturelle en X : si $\xi = E \xrightarrow{p} X$ est un fibré sphérique sur X, notons $\xi_\bullet$ le fibré d'espace total $E \underset{X}{\rtimes} \mathbb{R}^+$ (quotient de $E \times \mathbb{R}^+$ par la relation d'équivalence identifiant $(x, 0)$ à $(y, 0)$ lorsque $p(x) = p(y)$) muni de la flèche $p_\bullet$ induite par p. C'est une fibration de Hurewicz munie d'une section canonique 0_ξ ; en l'ôtant on trouve un fibré sphérique ayant le même type d'homotopie fibrée que ξ. On définit maintenant, si ξ et ξ' sont deux fibrés sphériques sur X (complexe cellulaire fini), $\xi * \xi'$ comme $\xi_\bullet \underset{X}{\times} \xi'_\bullet$ privé de sa section canonique $0_\xi \times 0_{\xi'}$ (muni de la projection sur X venant de celles de ξ et ξ') : c'est une fibration de Hurewicz dont les fibres ont le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n+m-1}$ si celles de ξ et ξ' ont celui de $\mathbb{S}^{n-1}$ et $\mathbb{S}^{m-1}$ respectivement. Cela induit de manière évidente une loi de composition interne naturelle sur $\pi(X, BG_\infty)$, associative, commutative et ayant pour élément neutre la classe des fibrés banals, ce qui montre que BG_∞ est un H-espace associatif et commutatif [48]. Comme c'est un complexe cellulaire connexe, c'est donc un H-groupe (i.e. son image dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ est munie d'une struture de groupe) par le théorème (élémentaire) 3.4 de [45] : la loi définie sur $\pi(X, BG_\infty)$ est donc une loi de groupe abélien naturelle, et elle peut se définir sans restriction de finitude sur X.

Proposition 44 – *BG_∞ a pour groupe fondamental $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et pour revêtement universel BSG_∞.*
– *Pour tout entier $i \geq 1$, $\pi_{i+1} BG_\infty$ est isomorphe au i-ème groupe d'homotopie stable des sphères (i.e. $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \pi_{n+i} \mathbb{S}^n$ [49]).*

(Ce résultat peut s'établir sans faire appel à la notion de classifiant d'un H-espace en utilisant la proposition générale du paragraphe 5.2 ci–après)

Démonstration : On a, pour tous entiers n et i tels que $1 \leq i \leq n-2$, $\pi_i G_n \simeq \pi_i SG_n \simeq \pi_{i+n-1} \mathbb{S}^{n-1}$. En effet, l'application $G_n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ $f \longmapsto f(x)$, où x est un point de base fixé dans $\mathbb{S}^{n-1}$, est une fibration de Hurewicz (localement banale), donc (pour $1 \leq i \leq n-2$) $\pi_i G_n \simeq \pi_i G'_n$, où G'_n désigne sa fibre, i.e. le sous-espace de G_n formé des applications (de degré 1 ou -1) préservant le point de base ; or $\pi_i G'_n$ s'identifie à l'ensemble des classes

[44] n'importe quel espace *localement compact* (cette hypothèse permettant de munir facilement l'ensemble des applications continues de F dans F d'une topologie appropriée — cf. [9], ch. X) conviendrait également — cf. [16].

[45] une orientation d'une fibration $p : E \to X$ aux fibres de même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-1}$ est par définition un élément de $H^n(X; E)$ (qui désigne la cohomologie entière relative du cylindre de p et de E) qui pour tout $x \in X$ donne par restriction à $H^n(\{x\}; p^{-1}(\{x\}))(\simeq \mathbb{Z})$ un générateur de ce groupe — on trouvera une autre définition cohomologique de l'orientation d'un fibré sphérique et d'autres résultats dans [44], ch. 5, § 7.

[46] la correspondance $X \longmapsto BX$, pour X H-espace associatif avec élément neutre, est fonctorielle, et l'inclusion de SG_n dans G_n fournit en appliquant B le revêtement universel.

[47] en effet, comme les BG_n sont des complexes cellulaires, donc des rétractes de voisinages, et que les applications $BG_n \to BG_{n+1}$ sont manifestement fermées, l'image d'un BG_n dans BG_∞ a le type d'homotopie d'un de ses voisinages ouverts, et la compacité de X permet donc d'intervertir la limite inductive et le foncteur $\pi(X, \cdot)$; on peut également le voir en termes simpliciaux vu que X a le type d'homotopie de la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial engendré par un sous–complexe fini.

[48] le fait que la structure de monoïde naturelle sur $\pi(X, BG_\infty)$ ne soit a priori définie que pour X complexe cellulaire *fini* n'est pas gênant : on se ramène à ce cas en considérant les sous–complexes finis de BG_∞ et en utilisant [10], ch. IX, § 3 et la finitude des groupes d'homotopie de BG_∞ établie ci–après.

[49] les applications $\pi_{n+i} \mathbb{S}^n \to \pi_{n+i+1} \mathbb{S}^{n+1}$ étant induites par la suspension.

d'homotopies pointées d'applications continues[50] $\mathbb{S}^i \bowtie \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ (cf. [9], ch. X), où $\bowtie$ désigne le produit contracté, or $\mathbb{S}^i \bowtie \mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^{i+n-1}$, d'où notre assertion. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\pi_i\, BG_\infty \simeq \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \pi_i\, BG_n$ et qu'on a des résultats analogues pour BSG_∞.

Grâce aux résultats de [42], on en déduit que tous les groupes d'homotopies de BG_∞ sont *finis.*

3.2 Fibrés vectoriels

Dans cette sous–section, $\mathbb{K}$ désigne le corps topologique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application $\mathbb{K} \to \mathbb{K} \quad x \longmapsto \bar{x}$ désigne l'identité si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels seront supposés munis de l'unique topologie en faisant des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels topologiques.

3.2.1 Le groupe abélien $K(X)$

Définition 26 *Soit X un espace paracompact. Un **fibré vectoriel** (sur $\mathbb{K}$) est la donnée d'une application continue $f : E \to X$ et, pour tout $x \in X$, d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sur la fibre $E_x = f^{-1}(\{x\})$*[51] *de sorte que l'on puisse recouvrir X par des ouverts U pour lesquels il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie V et un homéomorphisme $\varphi : f^{-1}(U) \to V \times U$ tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & V \times U \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ U & = & U \end{array}$$

commute[52] *et que pour tout $x \in U$ φ induise un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels entre E_x et V.*

Un fibré vectoriel est dit de rang n si toutes ses fibres sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n.

Un tel fibré sera souvent noté abusivement E (parfois f).

L'hypothèse de paracompacité de la base assure qu'une fibration vectorielle est une fibration de Hurewicz. On notera qu'une fibration localement banale étant donnée, une structure de fibration vectorielle sur celle–ci peut se définir sans utiliser les banalisations locales : c'est une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K} \times X \to X$ (vu comme objet de $\mathbf{Top}_X$ muni d'une structure de corps) sur la fibration en tant qu'objet de $\mathbf{Top}_X$ (cf. § 1.1.2).

Définition 27 *Soient X et X' deux espaces paracompacts, $E \xrightarrow{p} X$ et $E' \xrightarrow{p'} X'$ des fibrations vectorielles. On appelle **morphisme de fibrés vectoriels** de E vers E' tout couple d'applications continues $(E \xrightarrow{f} E', X \xrightarrow{g} X')$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & {\scriptstyle p'}\big\downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

commute et que pour tout $x \in X$ l'application induite par f entre les fibres E_x et $E'_{g(x)}$ soit linéaire. On note $\mathfrak{V}$ la catégorie des fibrés vectoriels.

*On appelle **morphisme de fibrés vectoriels de base** X tout morphisme du type (f, id_X) entre deux telles fibrations. On note $\mathcal{V}_X$ la sous–catégorie de $\mathfrak{V}$ (et de $\mathbf{Top}_X$) des fibrés vectoriels de base X.*

Comme pour les fibrations principales, la correspondance $X \to \mathcal{V}_X$ est fonctorielle contravariante : pour $f \in \hom_{\mathbf{Top}}(Y, X)$ (avec X et Y paracompacts) et $E \xrightarrow{p} X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}_X$ on définit $f^*p \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}_Y$ comme la projection $E \underset{X}{\times} Y \to Y$ (la structure d'espace vectoriel sur les fibres provenant des isomorphismes canoniques $(E \underset{X}{\times} Y)_y \simeq E_{f(y)}$) ; f^*p est appelée l'*image réciproque* (ou image inverse) de p par f.

Si Y et Z sont deux fibrés vectoriels de base X, on définit leur *somme directe* (ou *somme de Whitney*), notée $Y \oplus Z$, comme la projection canonique $Y \underset{X}{\times} Z \to X$ — pour tout $x \in X$ $(Y \underset{X}{\times} Z)_x \simeq Y_x \oplus Z_x$ canoniquement. Cette construction est naturelle en X (au sens de la fonctorialité contravariante explicitée ci–avant).

On note $\mathcal{E}(X)$ (resp. $\mathcal{E}_n(X)$, où $n \in \mathbb{N}$) l'ensemble[53] des classes d'équivalence de fibrés vectoriels (resp. de fibrés vectoriels de rang n) sur X. Les images inverses induisent de façon évidente des applications, encore notées et dénommées

[50] la condition de degré ne modifie pas les π_i pour $i \geq 1$.

[51] on utilisera par la suite systématiquement cette notation pour désigner les fibres.

[52] où la flèche verticale de gauche est induite par f et celle de droite est la projection.

[53] la catégorie des fibrés vectoriels de base X est essentiellement petite, donc cela a un sens.

de la même manière, sur $\mathcal{E}(X)$ et les $\mathcal{E}_n(X)$; l'addition (i.e. la somme directe) des fibrés induit sur $\mathcal{E}(X)$ une loi (notée $\oplus$ ou $+$) associative, commutative et possédant un élément neutre, noté 0.

Si X est un complexe cellulaire fini [54], on définit $K(X)$ (noté $K_{\mathbb{K}}(X)$ s'il y a ambiguïté sur $\mathbb{K}$) comme le groupe abélien obtenu en symétrisant l'addition sur $\mathcal{E}(X)$ (on peut par exemple le construire comme le quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{(\mathcal{E}(X))}$ par le sous–groupe engendré par les $c(E)+c(E')-c(E+E')$, où $c : \mathcal{E}(X) \to \mathbb{Z}^{(\mathcal{E}(X))}$ est l'application canonique) ; $K(X)$ s'appelle la *K–théorie* de X [55]. On obtient ainsi (les images réciproques se prolongeant de façon naturelle sur les $K(X)$) un foncteur $K : \mathbf{Cel}_f^{op} \to \mathbf{Ab}$ (nous verrons au paragraphe 3.2.4. que l'on peut munir les $K(X)$ d'une structure d'anneau naturelle).

On définit la *K–théorie réduite* d'un complexe cellulaire fini X comme le conoyau, noté $\widetilde{K}(X)$, du morphisme canonique $\mathbb{Z} \simeq K(*) \to K(X)$ ($*$ désignant un espace réduit à un point) : on « tue » les classes des fibrés banals dans $K(X)$; on obtient un foncteur $\widetilde{K} : \mathbf{Cel}_f^{op} \to \mathbf{Ab}$. Si $X \neq \varnothing$, tout choix de point de base $* \to X$ scinde la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to K(X) \to \widetilde{K}(X) \to 0$, d'où $K(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}(X)$, canoniquement dès que X est pointé [56].

Proposition 45 *Soient X un complexe cellulaire fini, E un fibré vectoriel* ***complexe*** *sur X. Il existe un complexe cellulaire fini Y et une application continue $f : Y \to X$ telle que*
- *f^*E est une somme directe de fibrés en droites,*
- *$f^* : K_{\mathbb{C}}(X) \to K_{\mathbb{C}}(Y)$ est injective.*

Nous admettrons cette propriété fondamentale, établie dans [7], qui repose sur la notion de classe de Chern. Signalons simplement que Y est défini par récurrence sur le rang de E, en construisant une fibration dont les fibres sont les espaces projectifs associés aux fibres de E.

3.2.2 Une équivalence de catégories

Dans ce paragraphe, on se fixe un espace **compact** X. On note $\mathcal{A}(X)$ la $\mathbb{K}$-algèbre (associative, commutative et avec unité) des applications continues de X dans $\mathbb{K}$. Pour tout fibré vectoriel E sur X, on note $\Gamma(E)$ l'ensemble de ses sections : c'est naturellement un $\mathcal{A}(X)$-module [57]. Cela définit clairement un foncteur $\mathcal{V}_X \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{A}(X)}$.

Proposition 46 *L'application $x \longmapsto \mathfrak{m}_x = \{a \in \mathcal{A}(X) \mid a(x) = 0\}$ est une bijection entre X et l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{A}(X)$.*

Démonstration : Cette application est injective car X est complètement régulier (cf. [9], ch. IX). Il suffit donc de montrer qu'un idéal I de $\mathcal{A}(X)$ tel que $\forall x \in X \quad \exists a \in I \quad a(x) \neq 0$ est égal à $\mathcal{A}(X)$. En effet, par compacité de X, il existe alors un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X et des éléments $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de I tels que, pour tout i, a_i ne s'annule pas sur I. Alors $\sum_{i=1}^n \overline{a_i} a_i$ est un élément de I partout non nul, donc inversible, d'où $I = \mathcal{A}(X)$ et la conclusion.

Proposition 47 *Soient E un fibré vectoriel sur E, x un point de X, U un voisinage de x et t un point de la fibre E_x. Alors il existe une section s de E de support inclus dans U telle que $s(x) = t$.*

Démonstration : Quitte à réduire U, on peut supposer que E y est banal. Il existe alors une section locale $s' : U \to E$ telle que $s'(x) = t$. Si f est une application de X dans $\mathbb{R}$ égale à 1 en x et de support inclus dans U (f existe car X est complètement régulier), l'application $s : X \to E$ nulle hors de U et égale à fs' sur U convient manifestement.

Proposition 48 *Pour tout fibré vectoriel E sur X, $\Gamma(E)$ est un $\mathcal{A}(X)$-module projectif de type fini.*

Démonstration : Soient $x \in X$ et U un voisinage de x sur lequel E est banal. Choisissons une base $(t_1, \ldots, t_n)$ de E_x et appliquons la proposition précédente : on obtient une famille $(s_1, \ldots, s_n)$ de sections de E prenant les valeurs $t_1, \ldots, t_n$ en x. Comme $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$, il existe un voisinage V de x inclus dans U tel que pour tout $y \in V$ $(s_1(y), \ldots, s_n(y))$ soit une base de E_y. Soit $f \in \mathcal{A}(X)$ à support dans V et non nulle en x. Alors $f \notin \mathfrak{m}_x$; et le morphisme canonique $\mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X)_f$ s'annule sur les $a \in \mathcal{A}(X)$ nulles sur V. Cela prouve que l'image de $(s_1, \ldots, s_n)$ dans $\Gamma(E)_f$ est une base de ce $\mathcal{A}(X)_f$-module. On conclut alors grâce à la proposition 46 et au théorème 1 de [8], chapitre II, § 5.

[54] On pourrait utiliser plus généralement cette définition pour X compact et localement contractile ; les raisons de ces restrictions apparaîtront dans les paragraphes suivants.

[55] on peut définir pour tout $i \in \mathbb{Z}$ un groupe abélien $K^i(X)$ qui pour $i = 0$ est $K(X)$ — voir [7], ou [27] pour une approche plus abstraite et générale ; nous n'en ferons pas usage.

[56] en fait, comme le morphisme $K(X) \to K(*)$ ne dépend que de la classe du point de base dans $\pi_0 X$, il suffit de pointer cet ensemble pour avoir un isomorphisme canonique.

[57] Le foncteur « section » fournit même plus généralement un faisceau de modules sur le faisceau d'anneaux des applications continues sur X. Ce point de vue rapproche les raisonnements de ce paragraphe de raisonnements de géométrie algébrique, ce qui les rend du reste plus naturels étant donné qu'ils utilisent autant de propriétés élémentaires d'algèbre commutative que de topologie.

Proposition 49 *Le foncteur Γ définit une équivalence de catégories entre $\mathcal{V}_X$ et la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}(X)}$ formée des modules projectifs de type fini.*

Démonstration : – Γ est pleinement fidèle : Soient E, $E' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}_X$ et $\phi \in \hom_{\mathbf{Mod}_{\mathcal{A}(X)}}(\Gamma(E), \Gamma(E'))$. Pour tout $f \in \hom_{\mathcal{V}_X}(E, E')$, $\phi = \Gamma(f) \iff \forall s \in \Gamma(E) \quad f \circ s = \phi(s)$. Soient $t \in E$ et x son image dans X : il existe $s \in \Gamma(E)$ telle que $s(x) = t$ (proposition 47) : on doit avoir $f(t) = \phi(s)(x)$, d'où l'unicité de f telle que $\phi = \Gamma(f)$. Pour l'existence, on remarque que si deux sections s, s' vérifient $s(x) = s'(x)$, alors $\phi(s)(x) = \phi(s')(x)$: en effet l'application $\mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathbb{K} \quad a \longmapsto a(x)$ induit un isomorphisme $\mathcal{A}(X)/\mathfrak{m}_x \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\Gamma(E) \otimes \mathcal{A}(X)/\mathfrak{m}_x \xrightarrow{\phi \otimes id} \Gamma(E') \otimes \mathcal{A}(X)/\mathfrak{m}_x$ s'identifie à $E_x \longrightarrow E'_x \quad s(x) \longmapsto \phi(s)(x)$. On peut donc définir une application $f : E \to E'$ au–dessus de X telle que pour toute section s de E $f \circ s = \phi(s)$; on vérifie qu'elle est continue en utilisant des banalisations locales de E.
– Γ est essentiellement surjectif : Soit M un $\mathcal{A}(X)$-module projectif de type fini. Par le théorème 1 de [8], ch. II, § 5, il existe $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}(X)$ tels que M_{f_i} soit pour tout i un $\mathcal{A}(X)_{f_i}$-module libre de rang fini r_i et que les f_i engendrent (comme idéal) $\mathcal{A}(X)$ — donc les ouverts $U_i = f_i^{-1}(\mathbb{K}^*)$ recouvrent X. Si l'on choisit pour tout i une base de M_{f_i} (sur $\mathcal{A}(X)_{f_i}$), le morphisme canonique $\mathcal{A}(X)_{f_i}^{r_i} \simeq M_{f_i} \to M_{\mathfrak{m}_x}$ induit un isomorphisme canonique $\mathbb{K}^{r_i} \xrightarrow{\simeq} M_{\mathfrak{m}_x}$. Soit E l'ensemble $\coprod_{x \in X} M_{\mathfrak{m}_x}$. Il existe une unique topologie sur E telle que pour tout i l'application canonique $U_i \times \mathbb{K}^{r_i} \to \coprod_{x \in U_i} M_{\mathfrak{m}_x}$ soit un homéomorphisme sur un ouvert de E. Il est alors clair que l'application canonique $E \to X$ est continue et définit une fibration vectorielle (banale sur chaque U_i). On a $\Gamma(E) \simeq M$: le morphisme évident $M \to \Gamma(E)$ devient après localisation relativement à un idéal $\mathfrak{m}_x$ un isomorphisme, donc c'est un isomorphisme ([8], ch. II, § 3, théorème 1), d'où la conclusion.

Par cette équivalence de catégories, somme directe de fibrés vectoriels de base X et somme directe de $\mathcal{A}(X)$-modules se correspondent ; si $f : Y \to X$ est une application continue entre espaces compacts, l'image réciproque $f^* : \mathcal{V}_X \to \mathcal{V}_Y$ correspond à l'extension des scalaires au niveau des $\mathcal{A}(X)$-modules par l'application linéaire $f^* : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(Y)$ (autrement dit, l'équivalence de catégories est naturelle en X).

Corollaire 5 *Pour tout fibré vectoriel E sur X, il existe un fibré E' sur X tel que $E \oplus E'$ soit banal.*

En effet par l'équivalence de catégories précédente modules libres de type fini et fibrés banals se correspondent.

Corollaire 6 *Si X est connexe par arcs*[58]*, on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens*

$$\widetilde{K}(X) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n(X)$$

où les applications $\mathcal{E}_n(X) \to \mathcal{E}_{n+1}(X)$ sont données par la somme directe avec la classe d'un fibré banal de rang 1.

3.2.3 Espaces classifiants

Proposition 50 *Soit X un espace paracompact localement contractile. Pour tout entier $n \geq 0$, on a un équivalence de catégorie naturelle en X entre les fibrés vectoriels de rang n de base X et les fibrés principaux de base X et de groupe $GL_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration : Soit $Y \xrightarrow{f} X$ est une $GL_n(\mathbb{K})$-fibration principale. L'application $Y \times \mathbb{K}^n \to Y \xrightarrow{f} X$ (où la première flèche est la projection) est invariante par l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ (produit de l'action sur Y et de l'action canonique sur $\mathbb{K}^n$), donc elle induit une application continue $E \xrightarrow{p} X$, où E est l'espace des orbites. On a, pour tout $x \in X$, une structure naturelle d'espace vectoriel sur la fibre E_x : si l'on se fixe $t \in f^{-1}(\{x\})$, tout élément de E_x a un unique représentant dans $f^{-1}(\{x\}) \times \mathbb{K}^n$ de première coordonnée t, ce qui identifie E_x à $\mathbb{K}^n$, et la structure d'espace vectoriel ainsi obtenue ne dépend pas du choix de $t \in f^{-1}(\{x\})$. Par le corollaire 4, f est localement banale, ce qui permet facilement de vérifier que p est une fibration vectorielle de rang n (banale sur tout ouvert où f l'est). Cette construction fournit aussitôt un foncteur des $GL_n(\mathbb{K})$-fibrations principales de base X vers les fibrations vectorielles de rang n de base X.

Construisons à présent un foncteur des fibrations vectorielles de rang n de base X vers les $GL_n(\mathbb{K})$-fibrations principales de base X : si $E \xrightarrow{p} X$ est un fibré vectoriel de rang n, considérons l'ensemble $Y = \coprod_{x \in X} A_x$, où A_x désigne, pour tout $x \in X$, l'ensemble des isomorphismes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ vers E_x. La projection canonique $Y \to X$ identifie (ensemblistement) X au quotient de Y par l'action (libre) évidente de $GL_n(\mathbb{K})$, et il existe une unique topologie sur Y telle que si p est banale sur l'ouvert U de X, la bijection naturelle $U \times GL_n(\mathbb{K}) \to \coprod_{x \in U} A_x$ obtenue en choisissant un isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et l'espace vectoriel V donné par la banalisation locale (cf. définition 26) soit un homéomorphisme sur un ouvert de Y ; celle–ci fait tautologiquement de $Y \to X$ une $GL_n(\mathbb{K})$-fibration principale de base X.

[58] cette hypothèse permet d'assurer que toutes les fibres d'une fibration vectorielle de base X sont de même dimension.

On vérifie aisément que les deux foncteurs définis ci–dessus sont des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre : au niveau des fibrés banals c'est clair, et le cas général s'en déduit par naturalité en recollant des fibrés banals.

Notons Gr_n (ou $Gr_n(\mathbb{K})$) la « n-grassmannienne infinie » limite inductive sur $k \in \mathbb{N}$ de la grassmannienne des espaces vectoriels de dimension n dans $\mathbb{K}^{n+k}$, celles–ci étant munies de leur topologie usuelle (cf. [9], ch. VI).

Proposition 51 *Pour tout complexe cellulaire X, on a une bijection naturelle $\mathcal{E}_n(X) \simeq \pi(X, Gr_n)$ (où π désigne l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues entre les deux espaces).*

Démonstration : Gr_n est (par construction) l'espace topologique quotient de l'espace E_n des familles de n vecteurs linéairement indépendants dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{K}^{n+k}$ par l'action évidente de $GL_n(\mathbb{K})$, laquelle en fait un fibré principal (localement banal) comme on le vérifie aussitôt. Par la proposition 41 et le résultat précédent, il suffit donc de voir que E_n est contractile. Comme E_n est un complexe cellulaire, il suffit de montrer que ses groupes d'homotopie sont triviaux.

Pour cela, on établit d'abord que si F est un sous–espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, alors les groupes d'homotopie de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\backslash F$ sont triviaux. Pour $F = \{0\}$, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\backslash F$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^\infty = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{S}^k \subset \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, et $\pi_i(\mathbb{S}^\infty) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \pi_i(\mathbb{S}^k) = 0$. Le cas général s'en déduit car $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\backslash F \simeq F \times (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\backslash\{0\})$.

On montre maintenant par récurrence sur n que les groupes d'homotopie de E_n sont triviaux : pour $n = 1$ cela vient de ce que $E_1 = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\backslash\{0\}$; pour tout $n > 1$ on a une fibration (localement banale) évidente $E_n \to E_{n-1}$ (on « oublie » l'un des vecteurs) dont les fibres sont homéomorphes à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\backslash\mathbb{K}^{n-1}$, d'où par la suite exacte d'homotopie le résultat.

Soit Gr_∞ (ou $Gr_\infty(\mathbb{K})$) la « grassmannienne infinie » limite inductive sur $n \in \mathbb{N}$ des Gr_n (l'application $Gr_n \to Gr_{n+1}$ associant à un sous–espace V de dimension n d'un $\mathbb{K}^{n+k}$ le sous–espace $\mathbb{K} \times \{0\}^{n+k} \oplus \{0\} \times V$ de dimension $n+1$ de $\mathbb{K}^{n+k+1}$).

Corollaire 7 *Pour tout complexe cellulaire connexe fini X on a un isomorphisme canonique $\widetilde{K}(X) \simeq \pi(X, Gr_\infty)$.*

C'est une conséquence directe de la proposition précédente et du corollaire 6 (la compacité de X assure que $\pi(X, \cdot)$ commute à la limite inductive filtrante dénombrable — cf. note 47).

Corollaire 8 *Pour tout complexe cellulaire fini X on a un isomorphisme canonique $K(X) \simeq \pi(X, \mathbb{Z} \times Gr_\infty)$.*

Pour X connexe cela découle du corollaire précédent ; le cas général s'en déduit en écrivant X comme somme de complexes connexes.

Ces résultats donnent une généralisation naturelle [59] de la K–théorie à des espaces topologiques quelconques : on pose $K(X) = \pi(X, \mathbb{Z} \times Gr_\infty)$.

Associons à tout fibré vectoriel sur un complexe cellulaire fini X la fibration sphérique (localement banale) obtenue en « ôtant la section nulle » ($\mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-1}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, de $\mathbb{S}^{2n-1}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : cela induit un morphisme de groupes naturel $\widetilde{K}(X) \to \pi(X, BG_\infty)$, qui provient, en K–théorie réelle comme complexe, d'une application continue (définie à homotopie près) $Gr_\infty \xrightarrow{J} BG_\infty$ (on a aussi, au niveau « instable » , de telles applications $Gr_n(\mathbb{R}) \to BG_n$ ou $Gr_n(\mathbb{C}) \to BG_{2n}$; on vérifie aussitôt que l'application précédente s'obtient comme limite inductive de celles–ci). L'image dans $\pi(X, BG_\infty)$ d'un élément de $K(X)$ (pour X complexe cellulaire fini) s'appelle son *type d'homotopie fibrée sphérique stable.*

3.2.4 Opérations sur la K–théorie

Nous avons défini de manière « globale » (i.e. sans recours à des banalisations locales) la somme directe de deux fibrés vectoriels ; il ne semble pas possible de procéder de même pour les autres opérations usuelles sur la K–théorie (correspondant pour les fibrés aux opérations usuelles sur les espaces vectoriels dans les fibres) : produit tensoriel, puissances extérieures etc. Il est facile de les définir en procédant d'abord sur les fibrés banals et en recollant par naturalité ; on peut aussi, sur un espace compact, utiliser la proprosition 49, en remarquant que le produit tensoriel de deux modules projectifs de type fini ou les puissances extérieures d'un module projectif de type fini sont des

[59] Il existe d'autres conventions « naturelles » de prolongement de la K–théorie ; on peut notamment utiliser, pour un complexe cellulaire, la limite projective de la K–théorie de ses sous–complexes finis ; la suite exacte de Milnor ([10], Ch. IX, § 3) mesurant la différence entre cette définition et celle que nous donnons.

modules projectifs de type fini (ce qui aboutit à la même définition que celle esquissée ci-avant vu que ces opérations commutent à la localisation pour des modules projectifs de type fini) : on obtient ainsi des morphismes de foncteurs $\cdot \otimes \cdot : K \times K \to K$ et $\Lambda^n : K \to K$ ($n \in \mathbb{N}$ — puissance extérieure n-ième).

Le produit tensoriel fait manifestement des groupes abéliens $K(X)$ des anneaux commutatifs de manière naturelle : on peut donc en fait définir le foncteur K de $\mathbf{Top}^{op}$ vers **Ann** (de sorte qu'on note souvent $\cdot$ au lieu de $\otimes$). Les images dans $K(X)$ (pour X complexe cellulaire fini disons) des fibrés de rang 1 y sont inversibles et l'opération de dualisation (définie de la même façon que $\otimes$) fournit le passage à l'inverse car, pour V $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, on a un isomorphisme *canonique* $V \otimes V^* \simeq \mathbb{K}$.

Le produit tensoriel fournit également une transformation naturelle de complexification $\mathfrak{c} : K_{\mathbb{R}} \to K_{\mathbb{C}}$; si l'on note $\mathfrak{o} : K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{R}}$ la transformation naturelle obtenue par « oubli de la structure complexe » sur un fibré, la composée $\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{c} : K_{\mathbb{R}} \to K_{\mathbb{R}}$ est la multiplication par 2.

Nous compenserons l'absence d'équivalent en K–théorie réelle de la proposition 45 par le résultat suivant :

Proposition 52 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le morphisme de complexification $\mathfrak{c}_{Gr_n(\mathbb{R})} : K_{\mathbb{R}}(Gr_n(\mathbb{R})) \to K_{\mathbb{C}}(Gr_n(\mathbb{R}))$ est injectif.*

Démonstration : D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $K_{\mathbb{R}}(Gr_n(\mathbb{R}))$ est sans 2-torsion. Comme $Gr_n(\mathbb{R})$ est le classifiant du groupe de Lie compact $O_n(\mathbb{R})$ (qui a même type d'homotopie que $GL_n(\mathbb{R})$ par décomposition polaire), [6] prouve que cet anneau est isomorphe au complété de l'anneau $A = R_{\mathbb{R}}(O_n(\mathbb{R}))$ des représentations linéaires réelles de $O_n(\mathbb{R})$ (voir [25] pour la définition et les propriétés élémentaires de cet anneau) pour la topologie définie par l'idéal I noyau de l'augmentation $\epsilon : A \to \mathbb{Z}$ qui à une représentation associe son degré. Mais par le corollaire 2 de [8], ch. III, § 3, 2 n'est pas diviseur de zéro dans ce complété puisqu'il ne l'est pas dans A, qui est un groupe abélien libre.

Proposition 53 *Il existe une unique famille de transformations naturelles $\psi^k : K \to K$ (pour $k \in \mathbb{Z}$; en K–théorie réelle comme complexe) telles que :*

1. *pour toute classe de fibré en droites ξ, $\psi^k \xi = \xi^k$,*
2. *pour tout espace X $\psi^k : K(X) \to K(X)$ est un morphisme d'anneau,*
3. *$\psi^k \circ \psi^l = \psi^{kl}$ pour tous entiers k et l,*
4. *ψ^1 est l'identité, ψ^0 est l'opération qui à la classe d'un fibré vectoriel associe la classe du fibré banal de même fibre*[60]*, ψ^{-1} est l'identité dans le cas réel et la conjugaison*[61] *dans le cas complexe,*
5. *les ψ^k sont compatibles à la complexification et à l'oubli de la structure complexe en ce sens que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{R}}} & K_{\mathbb{R}} \\ {\scriptstyle \mathfrak{c}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathfrak{c}}\downarrow \\ K_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{C}}} & K_{\mathbb{C}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} K_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{C}}} & K_{\mathbb{C}} \\ {\scriptstyle \mathfrak{o}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathfrak{o}}\downarrow \\ K_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\psi^k_{\mathbb{R}}} & K_{\mathbb{R}} \end{array}$$

   commutent pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Les ψ^k sont appelés *opérations d'Adams* ; elles induisent des transformations naturelles $\widetilde{K} \to \widetilde{K}$ donc aussi des applications continues (définies à homotopie près) $Gr_\infty \to Gr_\infty$ (encore notées de la même manière).

Démonstration : Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, le polynôme

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^k \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$$

est symétrique, donc il s'écrit de manière unique sous la forme $P_{k,n}(\sigma_{1,n}, \ldots, \sigma_{n,n})$ avec $P_{k,n} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, où

$$\sigma_{i,n} = \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ Card\, I = i}} \prod_{k \in I} X_k \quad (1 \leq i \leq n)$$

On définit, ξ étant la classe d'un fibré de rang n[62],

$$\psi^k \xi = P_{k,n}(\xi, \Lambda^2 \xi, \ldots, \Lambda^n \xi)$$

[60] si l'espace X n'est pas connexe par arcs, il faut évidemment faire cette opération sur chaque composante séparément ; cette description suppose également que l'on se trouve dans le cas où $K(X)$ peut être défini à l'aide de fibrés vectoriels.

[61] définie au niveau des fibrés vectoriels en remplaçant dans chaque fibre la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel par la structure conjuguée.

[62] on suppose ici aussi (ce qui suffit) que l'on est dans le cas où $K(X)$ se calcule avec des fibrés vectoriels (par exemple X complexe cellulaire fini) ; si X n'est pas connexe par arcs on fait cette opération aur chaque composante.

(pour $k>0$). On définit aussi ψ^0 et ψ^{-1} comme dans 4), puis pour $k<-1$ on pose $\psi^k=\psi^{-1}\psi^{-k}$. La naturalité, 1) et 5) sont clairs [63].

Vérifions que $\psi^k : K(X)\to K(X)$ est pour tout espace X un morphisme de groupes : il suffit de le faire pour $k>0$. Comme

$$\Lambda^i(\xi+\xi')=\sum_{u+v=i}\Lambda^u\,\xi\cdot\Lambda^v\,\xi'$$

(où $\Lambda^0\,\alpha=1$ — ici comme plus bas les sommations sont prises sur des indices u et v dans $\mathbb{N}$) il suffit de montrer que

$$P_{k,n+m}\Big(\sum_{u+v=i}X_uY_v\Big)_{1\le i\le n+m}=P_{k,n}(X_u)_{1\le u\le n}P_{k,m}(Y_v)_{1\le v\le m}$$

(où l'on a posé $X_0=Y_0=1$) pour tous i, n, $m\in\mathbb{N}^*$, ce qui résulte de ce que

$$\sigma_{i,n+m}(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)=\sum_{u+v=i}\sigma_{u,n}(X_1,\dots,X_n)\sigma_{v,m}(Y_1,\dots,Y_m)$$

(cette identité découle de ce que les $\sigma_{i,n}$ sont caractérisés par l'annulation de $\sum_{i=0}^n(-1)^i\sigma_{i,n}T^{n-i}$ pour $T=X_1,\dots,X_n$, où l'on convient que $\sigma_{0,n}=1$).

Maintenant la proposition 45 prouve, dans le cas complexe, le reste de la proposition (qui est clair pour les fibrés en droites), ainsi que l'unicité. Le cas réel s'en déduit : par naturalité des ψ^k, il suffit de voir que la proposition est satisfaite pour l'élément canonique de $K_{\mathbb{R}}(Gr_n(\mathbb{R}))$ [64] ; ce qui découle de 5) et de la proposition 52 [65].

3.3 Quelques lemmes de géométrie algébrique

3.3.1 Notations, généralités

Notons **Sch** la catégorie des schémas. Si X est un schéma affine $Spec\,A$ (où A est un anneau commutatif), nous noterons $\mathbf{Sch}_A$ pour $\mathbf{Sch}_X$ la catégorie des X-schémas.

Si k est un corps commutatif, nous appellerons *variété algébrique* sur k tout schéma de type fini sur $Spec\,k$; nous noterons $\mathbf{Var}_k$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_k$ formée des variétés algébriques sur k.

Si k' est un sous–corps de k, nous désignerons par $\mathbf{Var}_{k,k'}$ la sous–catégorie de $\mathbf{Var}_k$ formée des variétés sur k « qui peuvent se définir par des équations à coefficients dans k' » , i.e. (k-)isomorphes à une variété du type $Spec\,k\underset{Spec\,k'}{\times}Y$, où $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathbf{Var}_{k'}$, les flèches étant les morphismes obtenus à partir de morphismes de variétés sur $Spec\,k'$ (par image inverse). Le groupe $Gal(k/k')$ des k'-isomorphismes de k agit naturellement sur les objets de $\mathbf{Var}_{k,k'}$, de façon compatible aux morphismes (de $\mathbf{Var}_{k,k'}$).

La plupart du temps, on ne considèrera que des schémas X *séparés*, i.e. tels que l'injection de la diagonale dans $X\times X$ soit une immersion fermée.

Morphismes étales, lisses :

Définition 28 *1. Un morphisme d'anneaux commutatifs $A\xrightarrow{f}B$ est dit **étale** si :*

(a) il fait de B une A-algèbre de présentation finie,

(b) il fait de B un A-module plat,

(c) pour tout $\mathfrak{p}\in Spec\,B$ l'idéal maximal $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ de $B_{\mathfrak{p}}$ est engendré par l'image de $f^{-1}(\mathfrak{p})A_{f^{-1}(\mathfrak{p})}$ et $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ est une extension finie séparable de $A_{f^{-1}(\mathfrak{p})}/f^{-1}(\mathfrak{p})A_{f^{-1}(\mathfrak{p})}$.

2. Un morphisme de schémas $\varphi : Y\to X$ est dit étale en $y\in Y$ s'il existe un voisinage ouvert affine $V\simeq Spec\,B$ de x et un voisinage ouvert affine $U\simeq Spec\,A$ de $\varphi(y)$ tels que $\varphi(V)\subset U$ et que le morphisme d'anneaux $A\to B$ correspondant à φ soit étale. φ est dit étale s'il l'est en tout point de Y et s'il est de type fini.

*3. On appelle **revêtement étale** un morphisme étale et fini.*

[63] on a $\xi^2=1$ (resp. $\xi\bar\xi=1$) pour ξ classe de fibré en droites réel (resp. complexe) car $GL_1(\mathbb{R})$ (resp. $GL_1(\mathbb{C})$) a le type d'homotopie de $\{1,-1\}\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{U}\simeq\mathbb{S}^1$) et $t^2=1$ (resp. $t\bar t=1$) pour $t\in\{1,-1\}$ (resp. $t\in\mathbb{U}$).

[64] celui–ci est la classe d'homotopie de l'application canonique $Gr_n(\mathbb{R})\to Gr_\infty(\mathbb{R})$, qui bien que $Gr_n(\mathbb{R})$ ne soit pas un complexe cellulaire fini « provient » d'un fibré vectoriel, à savoir le fibré canonique de rang n sur cette grassmannienne, de sorte que les formules données pour définir les ψ^k valent aussi pour cet élément, et par fonctorialité cela fournira la proposition pour toute classe de fibré de rang n.

[65] En fait, il est inutile d'utiliser les propriétés *topologiques* 45 et 52 pour cette proposition manifestement essentiellement de nature algébrique ; on trouvera dans [25], ch. 13 § 10 une démonstration plus simple des propriétés des opérations d'Adams reposant sur les propriétés élémentaires des représentations linéaires. On notera également que [25] donne une définition différente de la nôtre des opérations d'Adams.

4. *Un morphisme de schémas $f : Y \to X$ est dit* ***lisse***[66] *en $y \in Y$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme étale en y $\varphi : Y \to X \times \mathbb{A}^n_X$ (où $\mathbb{A}^n_X$ désigne l'espace affine de dimension n sur X) tel que $f = p \circ \varphi$, où $p : X \times \mathbb{A}^n_X \to X$ est la projection. f est dit lisse s'il l'est en tout point de Y.*

Nous renvoyons à [38] et [23] pour des définitions équivalentes de ces notions (nous utiliserons notamment fréquemment le critère jacobien de lissité).

Morphismes propres, projectifs :

Définition 29 – *Un morphisme de schémas (resp. de X-schémas, où $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Sch}$) $f : A \to B$ est dit propre s'il est séparé, de type fini et si pour tout schéma (resp. X-schéma) Y le morphisme $f \times id_Y : A \times Y \to B \times Y$ est fermé. Un schéma (resp. X-schéma) Z est dit propre si le morphisme $Z \to * = Spec\,\mathbb{Z}$ (resp. $Z \to X$) est propre.*
- *Un morphisme de schémas (resp. de X-schémas, où $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Sch}$) $f : A \to B$ est dit projectif s'il admet une factorisation en $A \xrightarrow{i} B \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p} B$ (resp. $A \xrightarrow{i} B \times \mathbb{P}^n_X \xrightarrow{p} B$), où i est une immersion fermée, $\mathbb{P}^n$ (resp. $\mathbb{P}^n_X$) l'espace projectif (resp. le X-espace projectif) de dimension n et p la projection. Un schéma (resp. X-schéma) Z est dit projectif s'il se plonge comme sous–schéma fermé (resp. sous–X-schéma fermé) d'un espace projectif — i.e. si le morphisme $Z \to * = Spec\,\mathbb{Z}$ (resp. $Z \to X$) est projectif.*

Proposition 54 *Tout morphisme projectif est propre. En particulier, un schéma projectif est propre.*

Comme une immersion fermée et une composée de morphismes propres sont manifestement propres, cela se réduit à la propreté des espaces projectifs, fait élémentaire que nous supposons acquis.

Réalisation topologique :

Soit k un corps topologique commutatif et séparé (sa topologie est donc plus fine que la topologie de Zariski). On a un foncteur « points rationnels » $\mathbf{Var}_k \longrightarrow \mathbf{Ens}$ $\quad V \longmapsto V(k) = \hom_k(Spec\,k, V)$. En fait, on peut le factoriser à travers le foncteur d'oubli $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ de la manière suivante : si V est une variété affine $Spec\,A$, où A est une k-algèbre de type fini, on choisit une présentation $A \simeq k[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_m)$, de sorte que $V(k)$ s'identifie à l'ensemble des zéros communs dans k^n aux polynômes $P_1, \dots, P_m$; on le munit de la topologie induite par la topologie produit sur k^n — il est immédiat que l'espace topologique ainsi obtenu ne dépend pas de la présentation choisie. En général, on utilise un recouvrement fini de V par des ouverts affines $U_1, \dots, U_p$, de sorte que $V(k)$ s'identifie à un quotient de $\coprod_{i=1}^p U_i(k)$; on munit cet ensemble de la topologie quotient de la topologie somme (on vérifie encore aisément que cette topologie ne dépend pas du recouvrement ouvert affine fini choisi) ; la fonctorialité est définie de façon évidente.

Proposition 55 *Le foncteur de réalisation topologique $\mathbf{Var}_k \to \mathbf{Top}$:*
1. *commute aux produits et sommes finis,*
2. *transforme les immersions ouvertes (resp. fermées) en des homéomorphismes sur une partie ouverte (resp. fermée),*
3. *envoie une variété séparée sur un espace topologique séparé.*

Les deux premiers points sont immédiats à partir de la définition en se ramenant à des variétés affines, le dernier en découle.

Désormais on s'intéresse au cas $k = \mathbb{C}$ (avec sa topologie usuelle).

Proposition 56
1. *Pour toute variété algébrique complexe V, l'injection (ensembliste) canonique $V(\mathbb{C}) \to V$ induit une bijection naturelle $\pi_0\,V(\mathbb{C}) \simeq \pi_0\,V$, où le π_0 de droite est l'ensemble des composantes connexes de V pour la topologie de Zariski.*
2. *Si V est une variété algébrique lisse et séparée sur $Spec\,\mathbb{C}$, $V(\mathbb{C})$ est naturellement une variété analytique complexe*[67]*. Si V est projectif, $V(\mathbb{C})$ est compacte.*

[66] [23] utilise la terminologie de morphisme *simple*.

[67] Nous appelons variété analytique complexe un espace topologique *séparé* et *dénombrable à l'infini* vérifiant les conditions locales usuelles. Un tel espace est un complexe cellulaire. Sans hypothèse de lissité, on peut tout de même mettre une « structure complexe » sur l'espace topologique associé — cf. [41].

3. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C}}$ entre variétés lisses et séparées.

(a) si f est lisse (resp. étale), $f(\mathbb{C})$ est une submersion (resp. un difféomorphisme local) ;

(b) si f est projectif, $f(\mathbb{C})$ est propre ;

(c) si f est projectif et lisse, $f(\mathbb{C})$ est une fibration localement banale ;

(d) si f est un revêtement étale, $f(\mathbb{C})$ est un revêtement fini.

Démonstration : – 2) et 3) (a) résultent de la proposition précédente, du critère jacobien et du théorème d'inversion locale, 3) (b) de la proposition précédente et de ce qu'un espace projectif topologique complexe (réalisation du « même » espace projectif algébrique) est compact.
– 3) (c) résulte des points précédents et du théorème d'Ehresmann selon lequel une submersion propre est une fibration localement banale ; 3) (d) vient de 3) (a) et de ce que le cardinal des fibres d'un revêtement étale est fini et localement constant (cf. [23]).
– 1) Comme le foncteur de réalisation topologique commute aux sommes et aux recollements, envoie une variété non vide sur un espace topologique non vide et une variété sur le même espace que la variété réduite associée, il suffit de montrer que si V est une variété intègre non vide, $V(\mathbb{C})$ est connexe. Soit n la dimension de V : le corps des fonctions K de V est une extension de $\mathbb{C}$ de degré de transcendance n, donc par le théorème de l'élément primitif, il est de la forme $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)(t)$ où t a un polynôme minimal irréductible (dans $\mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)[T]$), que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction f/g avec f et g dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n][T]$, premiers entre eux, et f unitaire : f est donc irréductible dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n][T]$, et $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n][T]/(f)$ est une $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$-algèbre intègre finie de corps des fractions isomorphes à K, donc $H = Spec\, A$ est birationnellement équivalent à V, et il existe des ouverts denses M et N de H et V respectivement qui sont isomorphes. Il suffit de prouver que $H(\mathbb{C})$ est connexe : en effet cela entraînera que $M(\mathbb{C})$, dont le complémentaire dans $H(\mathbb{C})$ est (topologiquement) de codimension au moins 2, est connexe ; comme $N(\mathbb{C}) \simeq M(\mathbb{C})$ est dense dans $V(\mathbb{C})$ (son complémentaire est d'intérieur vide pour la même raison de codimension), cela achèvera la démonstration.

Notons π le morphisme fini $H \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$: par le théorème de Bertini, il existe un ouvert dense U de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ tel que si l'on note $W = \pi^{-1}(U)$, $\pi|_W : W \to U$ soit lisse, donc un revêtement étale. Cela montre déjà que $W(\mathbb{C})$, donc son adhérence $H(\mathbb{C})$, a un nombre fini de composantes connexes — en nombre inférieur ou égal au degré d de A sur $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, que nous noterons $C_1, \ldots, C_k$. En particulier, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\pi(\mathbb{C})$ induit un revêtement analytique fini $W(\mathbb{C}) \cap C_i \to U(\mathbb{C})$, dont nous désignerons par r_i le degré ; cela prouve que si l'on note, pour $a \in U(\mathbb{C})$, $(\sigma^i_m(a))_{1 \le m \le r_i}$ les fonctions symétriques élémentaires en les r_i antécédents de a par π dans C_i (cf. les notations de la démonstration de la proposition 53), les σ^i_m sont des fonctions holomorphes sur $U(\mathbb{C})$ (utiliser des banalisations locales analytiques de π). Si l'on pose $\lambda_i(a) = T^{r_i} + \sum_{j=0}^{r_i-1} (-1)^j \sigma^i_j(a) T^j \in \mathbb{C}[T]$, on a manifestement pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U(\mathbb{C})$

$$f(a_1, \ldots, a_n, T) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(a_1, \ldots, a_n) \tag{12}$$

Si l'on écrit $f(X_1, \ldots, X_n, T) = T^d + P_1(X_1, \ldots, X_n)T^{d-1} + \cdots + P_d(X_1, \ldots, X_n)$, on constate que pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}$, $f(a_1, \ldots, a_n, t)$ est non nul dès que $|t| \ge 2d \sum_{i=1}^{d} |P_i(a_1, \ldots, a_n)|$, donc tous les σ^i_m sont majorés polynomialement. On en déduit tout d'abord que les σ^i_m (donc les λ_i) se prolongent analytiquement à $\mathbb{C}^n$ tout entier (pour $n = 1$, le complémentaire de $U(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est isolé ; dans le cas général, pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}$, il existe i tel que parmi les points de $\mathbb{C}^n$ ayant les mêmes coordonnées, sauf peut–être la i-ème, que a, seul un nombre fini ne soient pas dans $U(\mathbb{C})$, et l'on est ramené au prolongement d'une fonction holomorphe d'une variable en un point isolé hors de son domaine de définition [68]), puis que la singularité des σ^i_m à l'infini est algébrique, ce qui implique que ces fonctions sont des *polynômes*. Maintenant la relation (12) et l'irréductibilité de f imposent $k = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Exemple : la grassmannienne $Gr_{\mathbb{C}}(n, k)$ représentant les sous–espaces de dimension n de $\mathbb{C}^{n+k}$ est une variété algébrique complexe séparée, lisse, propre et connexe ; sa réalisation topologique (la grassmannienne topologique correspondant aux mêmes dimensions [69]) est une variété analytique compacte connexe.

Désormais, sauf mention expresse du contraire, tous les schémas sont supposés *séparés* (les morphismes de schémas seront donc également séparés).

3.3.2 Un lemme de transversalité

Définition 30 *Deux sous–schémas Y, Z d'un schéma X sont dits* ***transverses*** *en $a \in Y \cap Z$ si $T_aY + T_aZ = T_aX$, où T_a désigne l'espace tangent de Zariski en a.*

[68] Pour les notions élémentaires d'analyse complexe utilisées, nous renvoyons à [39]. Du reste (dans le cas $n = 1$), cet ouvrage (ch. VI, § 14) prouve un résultat équivalent au nôtre ; nous reprenons sa méthode en l'exposant de manière plus algébrique.

[69] on le voit aussitôt en considérant les cartes (algébriques ou analytiques) canoniques de ces espaces.

Lorsque Y et Z sont lisses de codimensions respectives d et d' en a, cela équivaut à dire que $Y \cap Z$ est lisse de codimension $d + d'$ en a par le critère jacobien.

Proposition 57 *Soit X une sous–variété d'un espace projectif complexe $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Pour tout $d \in \{1, \dots, n\}$, l'ensemble des sous–espaces projectifs linéaires de dimension d de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ qui coupent X transversalement en chacun de ses points lisses contient l'ensemble des points complexes d'un ouvert dense de la grassmannienne $Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d)$* [70]*. Si x est soit un point fermé lisse de X tel que $\dim_x X \geq n - d$, soit un point de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ qui n'est pas dans X, on a un résultat avec les sous–espaces linéaires de dimension d passant par x* [71]*.*

Démonstration : Soit $V = \{(t, E) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d) \,|\, t \in E\}$: V est une sous–variété fermée lisse de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d)$ [72] et la projection $\pi : V \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est surjective et lisse (cela résulte du critère jacobien en traduisant, dans les cartes usuelles, la condition $t \in E$ par l'annulation de d déterminants). Si X est lisse de codimension c en un point t, $Y = \pi^{-1}(X) (= \{(a, E) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d) \,|\, a \in E \cap X\})$ est donc lisse de codimension c dans V en chaque point de $\pi^{-1}(\{t\})$. Considérons la projection $p : Y \hookrightarrow V \to Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d)$: pour tout $E \in Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d)$, $p^{-1}(\{E\}) \simeq E \cap X$. Maintenant le théorème de Bertini assure l'existence d'un ouvert non vide, donc dense, de $Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d)$, dont les points ne sont (éventuellement) atteints que par des points où la différentielle de p est surjective ; le critère jacobien montre donc que pour E dans cet ouvert $E \cap X$ est lisse de dimension $\dim_t X + d - n$ (car $\dim V = \dim Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d) + n - d$) en tout point lisse t de X, ce qui prouve la première assertion.

Pour la deuxième partie de la proposition, on raisonne de façon analogue en considérant $W = \{(t, E) \in V \,|\, x \in E\}$: W et $\pi|_W : W \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sont lisses en chaque point du type (t, E) avec $t \neq x$, et on obtient de de même que ci–avant que dans un ouvert dense [73] E coupe transversalement X, sauf peut–être en x. Il suffit maintenant pour conclure de constater que si $\dim T_x X \geq n - d$, l'ensemble des sous–espaces linéaires de dimension d de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ contenant x qui y coupent transversalement X est évidemment un ouvert dense.

3.3.3 Bons voisinages

Définition 31 *1. Soient $f : X \to S$ un morphisme de schémas et $x \in X$. On dit que f est une **fibration élémentaire** en x* [74] *s'il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"'] & Y \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "g"'] \\ S \arrow[r, equal] & S \arrow[r, equal] & S \end{tikzcd}$$

vérifiant :

(a) j est une immersion ouverte dense entre les fibres de f et $\tilde{f}$,

(b) $\widetilde{X} \backslash j(X) = i(Y)$,

(c) $\tilde{f}$ est projectif, lisse et sa fibre en $f(x)$ est irréductible de dimension 1,

(d) g est un revêtement étale à fibre en $f(x)$ non vide.

*2. Soient S un schéma, X un S-schéma et x un point de X. On appelle **bon voisinage** de x tout ouvert U de X contenant x tel qu'il existe une suite finie de S-schémas $V_0 = S, V_1, \dots, V_n = U$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ un morphisme de S-schémas $V_i \to V_{i-1}$ qui soit une fibration élémentaire en l'image de x dans V_i.*

Proposition 58 *La réalisation topologique d'une fibration élémentaire en un point fermé entre variétés algébriques complexes est une fibration localement banale dont la fibre (en le point considéré) est une surface de Riemann compacte connexe privée d'un nombre fini non nul de points.*

Démonstration : Cela provient facilement de la proposition 56 (la seule difficulté est, pour montrer, avec les notations de la définition, que $f(\mathbb{C})$ est une fibration localement banale, de voir que l'on peut « redresser » localement les sections (en nombre fini et localement d'adhérences disjointes) de $\tilde{f}(\mathbb{C})$ fournies par $g(\mathbb{C})$, ce qui peut se faire directement, ou se déduit de la démonstration du théorème d'Ehresmann invoqué).

---

[70] on identifie ici les sous–espaces linéaires de dimension d de $\mathbb{P}^n$ aux sous–espaces de dimension $d + 1$ de $\mathbb{A}^{n+1}$.

[71] la densité est alors évidemment relative à la sous–variété de $Gr_{\mathbb{C}}(d+1, n-d)$ des espaces contenant x.

[72] Nous commettons ici un abus de notation pour désigner le produit fibré schématique évident ; lorsqu'on travaille avec des variétés algébriques complexes, on peut sans danger assimiler les schémas avec leurs points fermés, pour lesquels cette écriture n'est pas abusive. Nous emploierons d'autres notations abusives du même type par la suite.

[73] de la sous–variété de la grassmannienne correspondant aux espaces contenant x, évidemment.

[74] la notion que nous introduisons ici, qui diffère légèrement de la notion traditionnelle (cf. [13] par exemple), est une définition *ad hoc* permettant une démonstration rapide des résultats présentés ci–après.

Proposition 59 *Soit X une variété algébrique complexe lisse et irréductible de dimension $n \geq 1$. Tout point fermé $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe une variété V lisse et irréductible de dimension $n-1$ et une fibration élémentaire en x $f : U \to V$.*

Démonstration : Comme la question est locale, on peut supposer X affine (disons sous–variété fermée de $\mathbb{A}^k_{\mathbb{C}}$) ; en plongeant l'espace affine comme sous–schéma ouvert dans un espace projectif, on peut considérer X comme une sous–variété de $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$.

Par la proposition 57, on peut trouver un sous–espace linéaire L de dimension $k-n+1$ de $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ contenant x et coupant X transversalement, de sorte que $L \cap X$ est une courbe lisse ; notons C_0 sa composante connexe contenant x et C_1 la réunion des autres composantes. Par la proposition 57 à nouveau, il existe un hyperplan H de $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ ne contenant pas x [75] et coupant $L \cap X$ transversalement : $L \cap X \cap H$ est un ensemble fini F, et l'on peut supposer que $F \cap C_0$ est non vide [76]. On pose $V = X \setminus (C_1 \cup F)$ (c'est un sous–schéma ouvert de X) et $E = L \cap H$.

Considérons la fonction rationnelle $r : \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ définie sur $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \setminus E$ par
$[x_0 : \ldots : x_k] \longmapsto \left[\sum_{m=0}^k a_{0,m} x_m : \ldots : \sum_{m=0}^k a_{n-1,m} x_m\right]$, où l'on a choisi des paramétrisations
$H = \left\{[x_0 : \ldots : x_k] \,\middle|\, \sum_{m=0}^k a_{0,m} x_m = 0\right\}$ et $L = \left\{[x_0 : \ldots : x_k] \,\middle|\, \sum_{m=0}^k a_{1,m} x_m = \cdots = \sum_{m=0}^k a_{n-1,m} x_m = 0\right\}$, et introduisons l'éclatement $D = \{(a,b) \in \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \mid a \in E \text{ ou } b = r(a)\}$ de E : c'est une sous–variété fermée de $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ (on le voit aussitôt dans les cartes usuelles), donc une variété projective. Notons $p : D \to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ et $\pi : D \to \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ les projections et posons $\widetilde{V} = \overline{p^{-1}(V)}$ et $W = \widetilde{V} \setminus p^{-1}(V)$, que l'on munit de la structure réduite. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{V} \arrow[d, "\tilde{f}"'] & W \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "g"'] \\ \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

où i est l'injection, j le morphisme $a \longmapsto (a, r(a))$, f est induit par r, $\tilde{f}$ et g par π. On va montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de $f(x) = [1 : 0 : \ldots : 0]$ dans $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ tel qu'en restreignant ce diagramme à U [77] on obtienne une fibration élémentaire en x.

Les conditions (a) et (b) de la définition sont évidemment vérifiées (sans restreindre le diagramme).

Il est également clair que $\widetilde{f}$ est projectif ; sa fibre en $f(x)$ s'identifie à C_0 (en effet $\pi^{-1}(\{[1:0:\ldots:0]\}) \simeq L$, d'où $\widetilde{f}^{-1}(\{[1:0:\ldots:0]\}) \simeq \overline{L \cap V} = \overline{C_0 \setminus (F \cap C_0)} = C_0$ car F est fermé et fini et C_0 fermé irréductible de dimension 1). L'hypothèse de transversalité entre L et V implique que $\widetilde{V}$ et $\tilde{f}$ sont lisses en tout point de cette fibre ; comme la lissité est une condition ouverte (cf. [23] ou [38]), la condition (c) de la définition est vérifiée au voisinage de $f(x)$.

Comme $F \cap C_0 \neq \varnothing$, la fibre de g au-dessus de $f(x)$ est non vide ; de même que ci–avant le fait que E coupe X transversalement assure que g est lisse au voisinage de $f(x)$; comme g est également projectif et quasi–fini, cela montre que g est un revêtement étale au voisinage de $f(x)$ (cf. par exemple [32], ch. I), ce qui achève la démonstration.

Corollaire 9 *Tout point fermé d'une variété algébrique complexe lisse possède un bon voisinage.*

Il suffit de raisonner par récurrence sur la dimension de la composante irréductible de l'espace passant par le point considéré en appliquant la proposition précédente (on prend comme bon voisinage l'image réciproque par la fibration élémentaire donnée par la proposition du bon voisinage de l'image du point par celle–ci fourni par l'hypothèse de récurrence).

Nous utiliserons ce résultat d'existence de bons voisinages par le biais de la proposition ci–après, qui assure que toute X variété algébrique complexe lisse possède un recouvrement par des ouverts de Zariski dont la réalisation topologique, sans être contractile, est homotopiquement raisonnable.

Disons qu'un groupe G est *bon* [78] si pour tout groupe abélien *fini* A (que l'on munit de l'action triviale de G), tout entier $n > 0$ et tout $\xi \in H^n(G, A)$, il existe un sous-groupe G' d'indice fini de G tel que l'image de ξ dans $H^n(G', A)$ soit nulle.

On vérifie aisément à l'aide de la suite spectrale des extensions de groupes (voir [24] et [40]) que si l'on a une suite exacte $\{1\} \to K \to G \to H \to \{1\}$ avec H et K bons, K de type fini et tel que les groupes $H^q(K, A)$ soient finis pour tout groupe abélien fini A, alors G est bon.

[75] en effet les hyperplans ne contenant pas x forment un ouvert non vide de la grassmannienne correspondante.

[76] en effet, si l'on se fixe un point fermé de C_0 distinct de x, on peut assujettir H à passer par celui–ci.

[77] i.e. en remplaçant $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ par U, V par $f^{-1}(U)$, $\widetilde{V}$ par $\tilde{f}^{-1}(U)$, W par $g^{-1}(U)$ et les morphismes par les morphismes induits entre ces variétés.

[78] nous utilisons ici la terminologie de [40] mais donnons une définition légèrement différente : nous nous restreignons à des actions *triviales* de G.

Notons que tout groupe de type fini K tel que $H^n(K,\mathbb{Z})$ soit nul pour $n > 1$ est bon et vérifie cette condition de finitude (utiliser la formule des coefficients universels — cf. [20] et $H^1(G,A) = \hom_{\mathbf{Grp}}(G,A)$ pour tout groupe abélien A sur lequel G opère trivialement).

Rappelons enfin (cf. [20]) que si un espace topologique a un revêtement universel contractile, ses groupes de cohomologie coïncident avec ceux de son groupe fondamental.

Proposition 60 *Soient X une variété algébrique complexe lisse, V un bon voisinage d'un de ses points. Alors $V(\mathbb{C})$ a un revêtement universel contractile et son groupe fondamental est un bon groupe.*

Démonstration : En raisonnant par récurrence sur la dimension de X, en utilisant la proposition 58, la suite exacte longue d'homotopie et les remarques précédentes, on voit qu'il suffit d'établir le résultat suivant :

Lemme *Soit S une surface de Riemann compacte connexe.*

1. *$H^0(S;\mathbb{Z})$ et $H^2(S;\mathbb{Z})$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}$, $H^1(S;\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de type fini et $H^n(S;\mathbb{Z})$ est nul pour $n > 2$;*
2. *Si F est une partie finie non vide de S, $S\backslash F$ a un revêtement universel contractile et son groupe fondamental est un groupe de type fini G tel que $H^i(G,\mathbb{Z})$ soit nul pour $i > 1$.*

Démonstration : – 1) : Comme une surface de Riemann est une variété orientable de dimension 2 (car un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 a une orientation — comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel — *canonique*), $H^2(S;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et les groupes de cohomologie de degré > 2 sont nuls ; comme les groupes d'homologie d'une variété compacte sont de type fini, $H^1(S;\mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de type fini (cf. [44], ch. 5 § 5).
– 2) : On prouve d'abord que $H^n(S\backslash F;\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour $n = 0$, libre de type fini pour $n = 1$ et nul pour $n > 1$. On procède par récurrence sur le cardinal k de F : soient $x \in F$ et $F' = F\backslash\{x\}$. Par excision, $H^i(S\backslash F', S\backslash F)$ [79] est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour $i = 2$ et nul sinon ; la suite exacte longue de cohomologie relative donne pour $k = 1$, comme le morphisme $\mathbb{Z} \simeq H^2(S, S\backslash\{x\}) \to H^2(S) \simeq \mathbb{Z}$ est un isomorphisme [80], $H^1(S\backslash\{x\}) \simeq H^1(S)$ et $H^2(S\backslash\{x\}) = \{0\}$, puis pour $k > 1$, par l'hypothèse de récurrence, $H^1(S\backslash F) \simeq H^1(S\backslash F') \oplus \mathbb{Z}$ et $H^2(S\backslash F) = \{0\}$; dans tous les cas on a $H^0(S\backslash F) \simeq H^0(S\backslash F')$, d'où l'assertion sur la cohomologie de $S\backslash F$, que nous noterons maintenant X.

L'application continue canonique $X \longrightarrow B\pi_1 X$ (définie à homotopie près) provenant de $id \in \hom_{\mathbf{Grp}}(\pi_1 X, \pi_1 X) \simeq \pi(X, B\pi_1 X)$ [81] induit tautologiquement un isomorphisme entre les groupes fondamentaux des deux espaces, mais aussi entre leurs groupes de cohomologie de degré $i > 1$: pour $i > 2$ cela résulte de ce que $H^i(B\pi_1 X)$ est comme $H^i(X)$ nul ($B\pi_1 X$ est un complexe cellulaire de dimension 2) et pour $i = 2$ cela vient de la nullité de $H^2(X)$ et de l'injectivité de $H^2(B\pi_1 X) \to H^2(X)$, fait général venant de ce que $X \to B\pi_1 X$ est bijective entre les π_1 et surjective entre les π_2 (on applique alors un théorème classique de Whitehead, établi dans [44], ch. 7 par exemple). En appliquant ce même théorème dans le sens réciproque, on voit que l'application canonique $X \to B\pi_1 X$ est une équivalence faible, ce qui signifie que le revêtement universel de X est contractile.

Enfin, on voit que $\pi_1 X$ est de type fini par exemple en utilisant un atlas fini de S et le théorème de Van–Kampen ; l'assertion sur ses groupes de cohomologie entière résulte du calcul de la cohomologie de X.

3.4 Cohomologie étale d'une variété algébrique complexe

3.4.1 Type d'homotopie étale d'un schéma

Dans tout ce paragraphe on se fixe un schéma X, que l'on suppose **noethérien** [82]. On note $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_X$ formée des X-schémas étales. Cette catégorie est *essentiellement petite* (les morphismes étales sont supposés de type fini).

Faisceaux étales

Définition 32 *On appelle **préfaisceau étale** (ou simplement préfaisceau s'il n'y a pas d'ambiguïté possible) sur X à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ tout objet de $\mathbf{Fct}(\mathbf{\acute{E}t}(X)^{op}, \mathcal{C})$.*

[79] on sous–entend désormais l'anneau $\mathbb{Z}$ dans les coefficients des groupes de cohomologie.
[80] cela provient facilement de la description des isomorphismes — cf. [44] chapitre 6.
[81] cette application peut aussi se voir comme l'application canonique de X dans le « premier étage » de sa tour de Postnikov, lequel s'identifie homotopiquement au classifiant du groupe fondamental.
[82] cette hypothèse est simplement destinée à assurer que tout X-schéma étale est somme de X-schémas étales connexes — cf. proposition 62 ci–après. X localement noethérien serait suffisant.

Lorsque $\mathcal{C}$ possède des produits, un tel préfaisceau F est appelé un ***faisceau*** *si pour tout objet $U \to X$ de $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ et toute famille $(V_i \to U)_{i\in I}$ d'objets de $\mathbf{\acute{E}t}(U)$* ***couvrante*** *(i.e. dont la réunion des images égale U), le diagramme de $\mathcal{C}$*

$$F(U) \to \prod_{i\in I} F(V_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I^2} F(V_i \underset{U}{\times} V_j)$$

est exact à gauche (i.e. fait de $F(U)$ l'égalisateur de la double flèche), où les flèches proviennent des applications de « restriction » données par les morphismes $V_i \to U$, $V_i \underset{U}{\times} V_j \to V_i$ et $V_i \underset{U}{\times} V_j \to V_j$. On note $\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathbf{\acute{E}t}(X)^{op}, \mathbf{Ens})$ constituée des faisceaux (d'ensembles) étales sur X.

Cette définition utilise implicitement le fait — tout à fait élémentaire — qu'une composée de morphismes étales est étale, de même que la stabilité des morphismes étales par changement de base (i.e. produit fibré). Ces propriétés font partie des axiomes des « topologies » de Grothendieck, formalisme que nous n'exposerons pas et pour lequel nous renvoyons à [47]. Les (pré)faisceaux se définissent en toute généralité dans ce cadre. Les (pré)faisceaux usuels sont obtenus en remplaçant la catégorie $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ par la catégorie des ouverts d'un espace topologique (les flèches provenant de la relation d'inclusion).

Si Y est un objet de $\mathbf{\acute{E}t}(X)$, le préfaisceau $U \longmapsto \hom_{\mathbf{Sch}_X}(U, Y)$ est un faisceau [83] (ce qui définit un plongement pleinement fidèle de $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ dans $\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$). Un tel faisceau est dit *représentable*. Un faisceau sera dit *semi–représentable* s'il est (isomorphe à une) somme de faisceaux représentables. On note $\mathbf{SR}_{\acute{e}t}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ (et de $\mathbf{Sch}_X$ — cf. corollaire 10 ci–après) formée des faisceaux étales sur X semi–représentables.

De même que dans le cas des faisceaux usuels, on définit les notions de faisceau associé à un préfaisceau, de somme, produit etc (voir [20] pour le cas des faisceaux usuels, [47] pour le cas général). On dispose également de la *fibre* en un point géométrique $x : Spec\, \kappa_s \to X$ (κ_s étant un corps commutatif séparablement clos [84]) qui fournit un foncteur $x^* : \mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X) \to \mathbf{Ens}$ ($x^*(F)$ est défini comme la limite inductive (filtrante) des $F(U)$ pour U voisinage étale de x [85]).

<u>Hyper–recouvrements</u>

Définition 33 *1. Un morphisme $A \to B$ de $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ est dit une* ***fibration locale triviale*** *si pour tout point géométrique x de X, le morphisme d'ensembles simpliciaux $x^*A \to x^*B$ (obtenu en appliquant le foncteur x^* degré par degré) est une fibration de Kan triviale.*

2. *On appelle* ***hyper–recouvrement*** *de X tout objet A de $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ tel que l'unique morphisme $A \to *$ (où $*$ désigne l'objet final de $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$, i.e. le faisceau simplicial trivial en chaque degré) soit une fibration locale triviale. Nous dirons qu'un hyper–recouvrement est* ***strict*** *s'il est semi–représentable en chaque degré* [86].

3. *Pour $K \in \mathrm{Ob}\, s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ et $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}$, on note $K \otimes A$ l'objet de $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ qui en degré n est la somme de copies de K_n indexées par A_n (les applications simpliciales étant déduites de celles de K et A).*

4. *Deux morphismes $f, g : K \to L$ de $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ sont dits* ***strictement homotopes*** *si le morphisme $f \sqcup g : K \sqcup K \to L$ se factorise à travers le morphisme $K \sqcup K \xrightarrow{d_0 \sqcup d_1} K \otimes \Delta^1$. On définit l'****homotopie*** *entre morphismes $K \to L$ comme la relation d'equivalence engendrée par l'homotopie stricte.*

5. *On note $\mathbf{HR}(X)$ la catégorie dont les objets sont les hyper–recouvrements de X et les morphismes les classes d'homotopie de morphismes de $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$* [87]*, $\mathbf{HR}_s(X)$ en désignera la sous–catégorie pleine des hyper–recouvrements stricts.*

Proposition 61 *$\mathbf{HR}(X)$ est une catégorie essentiellement petite filtrante à gauche. $\mathbf{HR}_s(X)$ en est une sous–catégorie cofinale.*

[83] il s'agit d'un fait élémentaire mais non trivial — voir par exemple [32]. Noter que ceci reste vrai pour tout X-schéma Y non forcément étale.

[84] lorsque X est une variété algébrique complexe, on peut évidemment se limiter aux points complexes ; la justification de cette notion de « points » est que tout morphisme étale sur le spectre d'un corps séparablement clos est trivial (i.e. somme de copies de l'identité), de même qu'en topologie un espace réduit à un point n'a pas d'ouverts non triviaux.

[85] i.e. X-schéma étale muni d'un relèvement de x.

[86] La terminologie que nous employons diffère de celle de [5] et [47], où « hyper–recouvrement » désigne ce que nous appelons « hyper–recouvrement strict » . La proposition ci-après montrera qu'il est en fait indifférent de travailler avec l'une ou l'autre notion. Signalons également que cette définition en termes de fibres est équivalente à celle de [5] et [47] (donnée en termes de cosquelettes) à cause de la remarque (8.5) a) de [5]. Notons enfin que [47] utilise des préfaisceaux et non des faisceaux : comme pour la topologie étale tout préfaisceau représentable est un faisceau, cela est sans importance.

[87] on vérifie aisément que l'homotopie est compatible à la composition des morphismes.

Nous admettrons cette proposition, purement formelle (elle n'est d'ailleurs nullement spécifique aux faisceaux étales). [47] (V, appendice) établit que $\mathbf{HR}_s(X)$ est filtrante à gauche, [35] que $\mathbf{HR}(X)$ est essentiellement petite (lemme 1.12) et que tout objet de $\mathbf{HR}(X)$ est dominé par un objet de $\mathbf{HR}_s(X)$ (lemme 1.16), ce qui montre le résultat.

Type d'homotopie étale

Proposition 62 *Soit* $\pi : \mathbf{\acute{E}t}(X) \to \mathbf{Ens}$ *le foncteur associant à un* X*-schéma étale l'ensemble de ses composantes connexes (pour la topologie de Zariski). Pour tout* $Y \in \operatorname{Ob}\mathbf{\acute{E}t}(X)$, $\pi(Y)$ *est somme disjointe de* X*-schémas étales connexes indexés par* $\pi(X)$.

Démonstration : Comme X est noethérien, tout X-schéma étale $Y \to X$ est également noethérien (car une algèbre étale sur un anneau noethérien est de type fini, donc un anneau noethérien) ; il n'a par conséquent qu'un nombre fini de composantes connexes, et est donc somme de celles–ci. Puisque la restriction de $Y \to X$ à une de ces composantes est évidemment étale, cela achève la démonstration.

Corollaire 10 *Toute somme finie de faisceaux étales représentables sur* X *est représentable.*

En effet, si U est un X-schéma étale connexe, pour toute famille (V_i) de X-schémas étales, on a $\hom_{\mathbf{\acute{E}t}(X)}(U, \sqcup V_i) \simeq \sqcup \hom_{\mathbf{\acute{E}t}(X)}(U, V_i)$, et les X-schémas étales connexes forment une base de la topologie étale par la proposition, ce qui montre le résultat vu qu'une somme finie de X-schémas étales est étale.

Notons que la même démonstration montre qu'un faisceau semi–représentable est représentable dans $\mathbf{Sch}_X$ [88].

Le foncteur π de la proposition s'appelle *foncteur de Verdier*. On peut le considérer comme défini sur les faisceaux représentables, puis sur les faisceaux semi–représentables (vu qu'il commute aux sommes — c'est du reste toujours le foncteur usuel « composantes connexes » que l'on obtient), et (degré par degré) sur $s\mathbf{SR}_{\acute{e}t}(X)$. Par passage au quotient, en utilisant le corollaire, il induit un foncteur encore noté $\pi : \mathbf{HR}_s(X) \to \mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ (il est en effet immédiat que les homotopies définies au sens précédent s'envoient par π sur des homotopies d'ensembles simpliciaux).

Définition 34 *On appelle **type d'homotopie étale** de* X *le pro–objet de*

$$X_{\acute{e}t} = (\pi(K))_{K \in \operatorname{Ob}\mathbf{HR}_s(X)} \in \text{pro} - \mathbf{Ho}(\mathbf{S})$$

Les foncteurs homotopiques usuels sont donc définis sur $X_{\acute{e}t}$, par exemple, si A est un groupe abélien,

$$H^i(X_{\acute{e}t}\,;\, A) = \varinjlim_{K \in \operatorname{Ob}\mathbf{HR}_s(X)^{op}} H^i(\pi(K)\,;\, A)$$

Notons que la correspondance $X \longmapsto X_{\acute{e}t}$ est fonctorielle.

Via l'identification entre $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ et $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$, on considérera souvent $X_{\acute{e}t}$ comme un pro–type d'homotopie d'espace topologique.

Corollaire 11 *Pour tout ensemble* E*, le foncteur* $\underline{E}_X : \mathbf{\acute{E}t}(X)^{op} \longrightarrow \mathbf{Ens} \quad U \longmapsto E^{\pi(U)}$ *est un faisceau ; c'est le faisceau associé au préfaisceau* E_X *sur* X *constant en* E.

Démonstration : Par la proposition, on a une bijection canonique $\underline{E}_X(U) \simeq \hom_{\mathbf{Top}}(U, E)$ (où le X-schéma étale U est muni de la topologie de Zariski et E de la topologie discrète), ce qui prouve, tout morphisme étale étant ouvert (cf. [23]), que $\underline{E}_X$ est un faisceau étale sur X [89]. Pour vérifier que le morphisme canonique de préfaisceaux $E_X \to \underline{E}_X$ satisfait la propriété universelle faisant de $\underline{E}_X$ le préfaisceau associé à E_X, il suffit d'utiliser à nouveau la proposition et le fait qu'un faisceau transforme sommes en produits.

Remarque : on peut éclairer ces notions par de l'algèbre homotopique dans la catégorie des faisceaux étales simpliciaux sur X. Les fibrations triviales locales s'insèrent par exemple dans une structure de catégorie d'objets fibrants — cf. [26] (en revanche, il ne semble pas possible de munir cette catégorie d'une structure de catégorie de modèles fermée). On peut également introduire une struture de catégorie de modèles fermée « globale » sur $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$, qui diffère de la précédente (tout en lui étant étroitement liée) — cf. [35].

[88] une somme infinie de X-schémas étales non triviaux sur X n'est pas étale car elle n'est pas de type fini. Cette restriction a été mise dans la définition de étale pour que $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ soit essentiellement petite.

[89] on peut aussi le voir en notant que $\underline{E}_X$ est le (pré)faisceau représenté par la somme de copies de X indexées par E. Cependant, il est inutile ici d'user du fait qu'un préfaisceau étale représentable est un faisceau.

3.4.2 Cohomologie étale et type d'homotopie étale

Comme au paragraphe précédent, X désigne un schéma noethérien.

Cohomologie des faisceaux étales abéliens

Notons $\mathbf{Fsc}^{ab}_{\acute{e}t}(X)$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathbf{\acute{E}t}(X)^{op}, \mathbf{Ab})$ formée des faisceaux étales de groupes abéliens sur X. Si A est un groupe abélien, le faisceau $\underline{A}_X$ introduit au corollaire 11 est un faisceau abélien (i.e. de groupes abéliens).

Proposition 63 *La catégorie* $\mathbf{Fsc}^{ab}_{\acute{e}t}(X)$ *est abélienne et possède assez d'objets injectifs.*

Nous renvoyons à [32] pour la démonstration (et à [20] pour les notions élémentaires d'algèbre homologique utilisées dans ce paragraphe).

Définition 35 *Étant donnés* $\mathcal{F} \in \operatorname{Ob} \mathbf{Fsc}^{ab}_{\acute{e}t}(X)$ *et* $n \in \mathbb{N}$*, on appelle* ***n-ième groupe de cohomologie étale de*** X ***à valeurs dans*** $\mathcal{F}$*, et l'on note* $H^n_{\acute{e}t}(X;\mathcal{F})$ *le groupe abélien* $\operatorname{Ext}^n(\underline{\mathbb{Z}}_X, \mathcal{F})$ *(c'est donc la valeur en* $\mathcal{F}$ *du n-ième foncteur dérivé du foncteur section sur* X*). Si* $\mathcal{F} = \underline{A}_X$*, où* A *est un groupe abélien, on note* $H^n_{\acute{e}t}(X;A)$ *pour* $H^n_{\acute{e}t}(X;\mathcal{F})$*.*

Cette cohomologie est évidemment fonctorielle contravariante en X.

Si $U \to X$ est un morphisme étale, le faisceau abélien étale $\underline{\mathbb{Z}}_U$ sur U se « prolonge » en un faisceau abélien étale sur X par $\underline{\mathbb{Z}}_U(V \to X) = \underline{\mathbb{Z}}_U(V \underset{X}{\times} U \to U)$. Le corollaire 11 entraîne aussitôt que $\underline{\mathbb{Z}}_U$ est le faisceau engendré par le préfaisceau qui a $V \to X$ associe $\mathbb{Z}$ si les images de U et V dans X se rencontrent, $\{0\}$ sinon ; d'où pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X un isomorphisme canonique (dans $\mathbf{Ab}$)

$$\hom_{\mathbf{Fsc}^{ab}_{\acute{e}t}(X)}(\underline{\mathbb{Z}}_U, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(U) \tag{13}$$

Soit à présent $K \in \operatorname{Ob} \mathbf{SR}_{\acute{e}t}(X)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les opérateurs $d_i : K_{n+1} \to K_n$ induisent des morphismes de faisceaux abéliens (sur X) $\underline{\mathbb{Z}}_{K_{n+1}} \to \underline{\mathbb{Z}}_{K_n}$. On peut donc faire de $\underline{\mathbb{Z}}_K (= (\underline{\mathbb{Z}}_{K_n})_{n\in\mathbb{N}})$ un complexe de faisceaux abéliens, en définissant une différentielle comme pour le complexe de Moore (cf. § 2.4.1).

Proposition 64 *Pour tout* $K \in \operatorname{Ob} \mathbf{HR}_s(X)$*, le morphisme* $\underline{\mathbb{Z}}_K \to \underline{\mathbb{Z}}_X$ *est une résolution dans* $\mathbf{Fsc}^{ab}_{\acute{e}t}(X)$ *(i.e. le complexe* $\cdots \to \underline{\mathbb{Z}}_{K_n} \to \underline{\mathbb{Z}}_{K_{n-1}} \to \cdots \to \underline{\mathbb{Z}}_{K_0} \to \underline{\mathbb{Z}}_X \to 0$ *est exact).*

Démonstration : Il suffit (cf. [13]) de montrer que pour tout point géométrique x de X $x^*\underline{\mathbb{Z}}_K \to x^*\underline{\mathbb{Z}}$ est une résolution (dans $\mathbf{Ab}$). Mais $x^*\underline{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$ et $x^*\underline{\mathbb{Z}}_U \simeq \mathbb{Z}^{(x^*U)}$ pour tout $U \in \operatorname{Ob} \mathbf{\acute{E}t}(X)$; or x^*K est par hypothèse un ensemble simplicial contractile, donc il a l'homologie du point, ce qui signifie exactement, avec les notations du § 2.4.1, que $L_{\mathbb{Z}}(x^*K) \to \mathbb{Z}$ est une résolution, d'où la conclusion.

Le théorème d'isomorphisme de Verdier

Lemme 1 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, tout* $\mathcal{F} \in \operatorname{Ob} \mathbf{Fsc}^{ab}_{\acute{e}t}(X)$ *et tout* $\xi \in H^n_{\acute{e}t}(X\,;\mathcal{F})$*, il existe une famille couvrante* (U_i) *de* X*-schémas étales telle que pour tout* i *l'image de* ξ *dans* $H^n_{\acute{e}t}(U_i\,;\mathcal{F}|_{U_i})$ *(où* $\mathcal{F}|_{U_i}$ *désigne la restriction de* $\mathcal{F}$ *à* U_i *en un sens évident) soit nulle.*

Démonstration : Soit x un point de X. Considérons (par exemple en prenant une clôture séparable du corps résiduel en x) un point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x et une résolution injective $\mathcal{F} \to \mathcal{I} = (\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$. La suite $\bar{x}^*\mathcal{I}_{n-1} \to \bar{x}^*\mathcal{I}_n \to \bar{x}^*\mathcal{I}_{n+1}$ est exacte donc, si z est un cocycle de $\mathcal{I}_n$ de classe ξ dans $H^n_{\acute{e}t}(X\,;\mathcal{F})$, il existe un germe $t \in \bar{x}^*\mathcal{I}_{n-1}$ qui s'envoie sur $\bar{x}^*z$. Si t provient d'une section de $\mathcal{I}_{n-1}$ sur un voisinage étale U de $\bar{x}$, l'image de ξ dans $H^n_{\acute{e}t}(U\,;\mathcal{F}|_U)$ est nulle, et l'image de U dans X contient x, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 2 *Pour tout objet* K *de* $\mathbf{HR}_s(X)$*, tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout morphisme surjectif* $u : A \to K_n$ *de* $\mathbf{SR}_{\acute{e}t}(X)$*, il existe un objet* L *de* $\mathbf{HR}_s(X)$ *et un morhisme* $f : L \to K$ *tel que* $f_n : L_n \to K_n$ *se factorise par* u*.*

Démonstration : On prouve d'abord que pour tout objet U de $\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_{\aleph}$, le foncteur $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)^{op}_{\aleph} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ $L \longmapsto \hom_{\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(L_n, U)$ est représentable par un objet $R(U)$, où $\aleph$ est un cardinal infini et $\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_{\aleph}$ désigne la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ formée des faisceaux dont les germes en tout point géométrique de X sont de cardinal au plus $\aleph$[90]. Introduisons à cet effet la catégorie I_U dont les objets sont les couples (L, f) où $L \in \operatorname{Ob} s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_\aleph$ et $f \in \hom_{\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(L_n, U)$, les flèches $(L, f) \to (L', f')$ étant les morphismes $\xi : L \to L'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_n \arrow[r, "\xi_n"] \arrow[d, "f"'] & L'_n \arrow[d, "f'"'] \\ U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

commute (la composition étant définie à partir de celle de $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$). Notons $F_U : I_U \longrightarrow s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ le foncteur $(L, f) \longmapsto L$. I_U étant (comme $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_\aleph$) essentiellement petite, on dispose dans $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)$ de la limite inductive $R(U)$ de F_U, qui est en fait dans $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_\aleph$ car la limite inductive est filtrante[91], et qui est munie d'un morphisme tautologique $R(U)_n \xrightarrow{\psi_U} U$. Pour tous $L \in \operatorname{Ob} s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_\aleph$ et $f \in \hom_{\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(L_n, U)$, le morphisme canonique $L = F_U(L, f) \to R(U)$ rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_n \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R(U)_n \arrow[d, "\psi_U"'] \\ U \arrow[r, equal] & U \end{tikzcd}$$

et une telle factorisation est manifestement unique, donc $R(U)$ a bien la propriété requise.

Fixons maintenant un cardinal infini $\aleph$ assez grand pour que tous les faisceaux représentables, ainsi que A et les K_n soient dans $\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_\aleph$.

Remarquons que pour tout $U \in \operatorname{Ob} \mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_\aleph$, tout ensemble simplicial E *fini* — au sens qu'il est engendré par un sous–complexe fini (i.e. E est fini en chaque degré et égal à son k-squelette pour k assez grand) — et tout point géométrique x de X, le morphisme canonique

$$\hom_{\mathbf{S}}(E, x^*R(U)) \longrightarrow \hom_{\mathbf{Ens}}(E_n, x^*R(U)_n) \xrightarrow{(x^*\psi_U)_*} \hom_{\mathbf{Ens}}(E_n, x^*U)$$

est un isomorphisme. En effet, l'hypothèse de finitude montre que le morphisme canonique $\varinjlim_V \hom_{\mathbf{S}}(E, R(U)(V)) \longrightarrow \hom_{\mathbf{S}}(E, x^*R(U))$ (où la limite est prise sur les voisinages étales V de x) est un isomorphisme, or $\hom_{\mathbf{Ens}}(F, \mathcal{F}(V)) \simeq \hom_{\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(V \otimes F, \mathcal{F})$ (où $V \otimes F$ désigne ici la somme de copies de V indexées par F) pour tout X-schéma étale V, tout ensemble fini F et tout faisceau étale $\mathcal{F}$, et $\hom_{s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(V \otimes E, R(U)) \simeq \hom_{\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(V \otimes E_n, U) \simeq \hom_{\mathbf{Ens}}(E_n, \hom_{\mathbf{\acute{E}t}(X)}(V, U))$, et l'on obtient le résultat souhaité par passage à la limite inductive (filtrante) sur V (laquelle commute à $\hom_{\mathbf{Ens}}(E_n, \cdot)$ car E_n est fini).

Notons $g : R(A) \to R(K_n)$ le morphisme image de u par $\hom_{\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(A, K_n) \xrightarrow{(\psi_A)^*} \hom_{\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(R(A)_n, K_n) \simeq \hom_{s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)}(R(A), R(K_n))$. Montrons que g est une fibration locale triviale : il s'agit d'établir que dans un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$ du type

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & x^*R(A) \arrow[d, "x^*g"'] \\ D \arrow[r] & x^*R(K_n) \end{tikzcd}$$

où x est un point géométrique de X et $C \xrightarrow{i} D$ une cofibration, on dispose d'un relèvement (i.e. un morphisme $D \to x^*R(A)$ faisant commuter les deux triangles évidents). On peut se limiter au cas où C et D sont finis[92], de sorte que par ce qui précède ce diagramme est équivalent à la donnée d'un diagramme commutatif ensembliste

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r] \arrow[d, "i_n"'] & x^*A \arrow[d, "u_*"'] \\ D_n \arrow[r] & x^*K_n \end{tikzcd}$$

Comme u_* est surjectif et i_n injectif, il existe un relèvement dans ce diagramme, donc dans le précédent, et g est bien une fibration locale triviale.

[90] on peut évidemment se limiter à un *ensemble* de points géométriques — par exemple ceux obtenus en choisissant une clôture séparable au corps résiduel de chaque point de X.

[91] en effet, comme $\aleph$ est infini, $s\mathbf{Fsc}_{\acute{e}t}(X)_\aleph$ est stable par somme, et cette catégorie a aussi clairement des coégalisateurs.

[92] par exemple parce qu'une flèche de $\mathbf{S}$ est une fibration triviale si et seulement si elle a la propriété de relèvement à droite relativement aux inclusions $\operatorname{sk}_{m-1} \Delta^m \to \Delta^m$ — cf. [21].

On définit maintenant $L = K \times_{R(K_n)} R(A)$ (dans $s\mathbf{Fsc}_{ét}(X)$), où les morphismes $R(A) \to R(K_n)$ et $K \to R(K_n)$ sont u et la flèche correspondant à $id : K_n \to K_n$ respectivement. Le morphisme $L \to K$ est comme g une fibration locale triviale (image inverse d'un tel morphisme), donc $L \to K \to *$ également (K est un hyper–recouvrement) et L est un hyper–recouvrement. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & R(A) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow g \\ K & \longrightarrow & R(K_n) \end{array}$$

donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_n & \longrightarrow & A \\ \big\downarrow & & \big\downarrow u \\ K_n & = & K_n \end{array}$$

ce qui est la factorisation escomptée. K n'est peut-être pas dans $\mathbf{HR}_s(X)$, mais on peut toujours trouver un hyper–recouvrement strict qui s'envoie dans K par la proposition 61, ce qui permet de conclure.

Proposition 65 *Pour tout faisceau étale abélien $\mathcal{F}$ sur X et tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique*

$$H^n_{ét}(X\,;\mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{K \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{HR}_s(X)^{op}} H^n(\mathcal{F}(K))$$

où la cohomologie du terme de droite est celle du groupe cosimplicial $\mathcal{F}(K)$ (cf. § 2.4.1).

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \varinjlim_{K \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{HR}_s(X)^{op}} H^q_{ét}(K_n\,;\mathcal{F}) = 0$$

En effet, cela implique que la « pro–résolution » $(\mathbb{Z}_K)_{K \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{HR}_s(X)}$ de $\mathbb{Z}_X$ (proposition 64) est $\mathcal{F}$–acyclique, ce qui permettra de conclure par des résultats généraux d'algèbre homologique (cf. [5] et [47]).

Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{HR}_s(X)$ et $\xi \in H^q_{ét}(K_n\,;\mathcal{F})$: par le lemme 1, il existe un morphisme surjectif $u : A \to K_n$ de $\mathbf{SR}(X)$ tel que l'image de ξ dans $H^q_{ét}(A\,;\mathcal{F})$ soit nulle (prendre pour A la somme des U_i donnés par le lemme). Maintenant il suffit d'appliquer le lemme 2 pour obtenir un hyper–recouvrement strict L dominant K et tel que l'image de ξ dans $H^q_{ét}(L_n;\mathcal{F})$ soit nulle, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 12 *Pour tout groupe abélien G et tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique*

$$H^n(X_{ét}\,;G) \simeq H^n_{ét}(X\,;G)$$

Ce n'est que la réécriture de la proposition dans le cas $\mathcal{F} = \underline{G}_X$, vu que pour $K \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{HR}_s(X)$ on a $H^n(\underline{G}_X(K)) = H^n(G^{\pi(K)}) = H^n(\pi(K)\,;G)$.

Remarque : ce résultat est susceptible de plusieurs variantes.

Sous certaines hypothèses sur X, on peut calculer la cohomologie étale en se restreignant aux hyper–recouvrements stricts provenant d'un morphisme couvrant (voir [5], (8.5)b) qui fournissent une « cohomologie de Čech » étale : c'est ce qu'établit Artin dans [4].

Lubkin a introduit dans [29] une cohomologie à la Alexander–Spanier dans le cadre étale, qui coïncide également avec la cohomologie que nous avons définie (dont l'introduction est due à Grothendieck) dans les « bons » cas.

Un analogue topologique

Soit T un espace topologique. Nous avons remarqué que les faisceaux (classiques) sur T — qui forment une catégorie que l'on notera $\mathbf{Fsc}_{cl}(T)$ ($\mathbf{Fsc}^{ab}_{cl}(T)$ désignera la sous–catégorie des faisceaux abéliens) — peuvent se décrire comme les faisceaux étales, en remplaçant $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ par la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Top}_T$ formée des ouverts de T [93] (munis de l'injection dans T). En procédant de manière tout à fait analogue à ce que nous avons exposé dans le cas étale,

[93] On considère plutôt en général les *sommes* d'ouverts de T, ce qui ne change évidemment rien vu que nous avons défini les hyper–recouvrements stricts comme étant *semi*–représentables en chaque degré ; cela permet de se restreindre à une petite catégorie.

on définit un (pro–)type d'homotopie noté T_{cl} dont la cohomologie à valeurs dans un groupe abélien quelconque G s'identifie à la cohomologie de T à valeurs dans la faisceau engendré par le préfaisceau abélien constant en G (la démonstration du théorème d'isomorphisme de Verdier est totalement formelle — cf. [5] pour une preuve écrite dans le cadre général des topologies de Grothendieck). Si l'on suppose de plus que T est paracompact et fortement localement contractile [94], cette cohomologie des faisceaux s'identifie à la cohomologie singulière de T à coefficients dans G (voir [44], ch. 6). On a donc (pour tout $i \in \mathbb{N}$) un isomorphisme canonique

$$H^i(T_{cl}\,;\,G) \simeq H^i(T\,;\,G)$$

sous ces hypothèses, qui valent notamment lorsque T est une variété topologique.

Dans [5], ce résultat (sous l'hypothèse légèrement plus forte que tout ouvert de T est paracompact) est établi de manière un peu différente (sans utiliser ni l'isomorphisme de Verdier ni celui entre les cohomologies singulière et des faisceaux) sous une forme plus précise : les groupes fondamentaux sont également comparés, ce qui permet d'obtenir un isomorphisme (dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$) entre (le type d'homotopie de) T et T_{cl}.

Notons enfin que l'on peut remplacer les inclusions ouvertes dans T par les homéomorphismes locaux vers T, obtenant ainsi un (pro–)type d'homotopie noté T_{loc} qui est identique à T_{cl} : en effet, la notion de faisceau est de nature locale et, par définition, un homéomorphisme local vers T s'identifie localement à une telle inclusion, donc les faisceaux obtenus (qui forment une catégorie $\mathbf{Fsc}_{loc}(T)$ — nous noterons $\mathbf{Fsc}^{ab}_{loc}(T)$ la sous–catégorie des faisceaux abéliens) sont encore les faisceaux usuels (pour la signification précise de ces assertions en termes de topologies de Grothendieck, voir [47]).

3.4.3 Comparaison des cohomologies étale et singulière

Proposition 66 *Soit V une variété algébrique complexe lisse. Tout revêtement fini de $V(\mathbb{C})$ est isomorphe à la réalisation topologique d'un revêtement étale de V.*

Ce résultat, que nous admettrons, est en fait valable sans hypothèse de lissité — voir [41] pour le cas projectif, [22] pour le cas général.

Proposition 67 *Soit X une variété algébrique complexe lisse. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout groupe abélien* ***fini*** *G, on a un isomorphisme canonique*

$$H^n(X_{ét}\,;\,G) \simeq H^n(X(\mathbb{C})\,;\,G)$$

Démonstration : Par la proposition 56, le foncteur de réalisation topologique envoie les objets de $\mathbf{\acute{E}t}(X)$ sur des homéomorphismes locaux de $X(\mathbb{C})$: il définit donc une « application continue » $\tau : X(\mathbb{C})_{loc} \to X_{ét}$ [95] pour les topologies de Grothendieck (cf. [47]). Le foncteur induit $\tau^* : \mathbf{Fsc}^{ab}_{ét}(X) \to \mathbf{Fsc}^{ab}_{loc}(X(\mathbb{C}))$ envoie $\underline{G}_X$ sur le faisceau sur $X(\mathbb{C})$ engendré par le préfaisceau constant en G, d'où pour tout $i \in \mathbb{N}$ un morphisme canonique $\tau^* : H^i(X_{ét}\,;\,G) \to H^i(X(\mathbb{C})\,;\,G)$ grâce aux isomorphismes du paragraphe précédent. Il découle de la suite spectrale de Leray (le cas usuel décrit dans [20] se généralise sans difficulté — cf. [47]) que pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme, il suffit d'établir que le faisceau abélien étale sur X associé au préfaisceau $V \longmapsto H^q(V(\mathbb{C})\,;\,G)$ est nul pour tout $q > 0$. Pour prouver que sa fibre en tout point géométrique x de X est nulle, on note qu'on peut se restreindre au cas où x est un point complexe de X et on choisit un bon voisinage V de X en x (corollaire 9). Comme le revêtement universel de $V(\mathbb{C})$ est contractile (proposition 60), l'image de toute classe de cohomologie $\xi \in H^q(V(\mathbb{C})\,;\,G)$ est nulle dans celui–ci, donc déjà dans un revêtement fini de $V(\mathbb{C})$ puisque G est fini et le groupe fondamental de $V(\mathbb{C})$ bon (par la même proposition). Par la proposition précédente, ce revêtement est la réalisation topologique d'un revêtement étale de V, d'où la conclusion.

Remarques : – Cette démonstration est remarquable en ce qu'elle ne nécessite le calcul d'*aucun* groupe de cohomologie étale. En fait, la proposition 66, utilisée de façon essentielle, contient déjà le résultat pour la cohomologie de degré 1 ; elle permet également de comparer les groupes fondamentaux de X et $X(\mathbb{C})$ — cf. [5].
– Nous utiliserons ce théorème de comparaison cohomologique pour montrer qu'un certain complété profini de la grassmannienne complexe coïncide pour la topologie étale et la topologie classique (cf. sections 4 et 5). En fait, le type d'homotopie étale coïncide déjà avec le complété profini d'Artin–Mazur ou Sullivan de la topologie classique [96]. Cela se démontre en utilisant, outre la comparaison de la cohomologie et du groupe fondamental, la profinitude du type d'homotopie étale et un résultat de finitude dimensionnelle en cohomologie — voir [5].

[94] i.e. que sa topologie admet une base formée d'ouverts contractiles.
[95] ici ces espaces ne désignent pas les types d'homotopie introduits au § 3.4.1 mais les espaces munis de la topologie de Grothendieck.
[96] ceci est même vrai sous l'hypothèse, plus faible que la lissité, que la variété est géométriquement unibranche.

4 Complétion et localisation des espaces nilpotents

Dans cette partie, nous exposons quelques–uns des résultats de base de la théorie de Bousfield–Kan. Après avoir défini (4.1) les foncteurs utiles et en avoir présenté les propriétés homotopiques essentielles (4.2), nous montrons que cette théorie fournit en toute généralité une complétion homotopique pro–nilpotente (4.3), puis que moyennant quelques raffinements elle aboutit également à une complétion profinie générale (4.4). Nous terminons cette section par la théorie, particulièrement satisfaisante et simple avec les outils précédents, de la localisation homotopique des espaces nilpotents (4.5).

La construction, remarquablement explicite, de Bousfield–Kan est naturellement *simpliciale* et utilise les machineries homotopiques des espaces cosimpliciaux qui sortent du cadre de ce mémoire : nous avons admis la plupart des propositions premières, préférant insister sur les conséquences formelles que l'on peut en tirer et détailler quelques points exposés rapidement dans [10].

Dans son article [46] (§ 3), Sullivan emploie une autre théorie de la complétion homotopique utilisant l'approche d'Artin–Mazur ([5]) et le théorème de représentabilité de Brown ([11]) pour construire une limite homotopique aux pro–objets obtenus ; ce pont de vue est discuté de façon synthétique dans [34] (§ 1). A la différence de la méthode de Bousfield–Kan, cela ne permet pas de construire également un foncteur de localisation des espaces nilpotents (cette localisation est abordée de manière directe dans [46], § 2).

Références bibliographiques principales : [10] pour 4.1, 4.2 et 4.5 ; [10] et [5] pour 4.3 ; [33] pour 4.4.

4.1 Définitions

4.1.1 L'anneau de base A

Dans toute cette section, on se donne un anneau A que l'on supposera *commutatif* et *solide* — c'est à dire que l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A \xrightarrow{\mu} A$ telle que $\mu(a \otimes b) = ab$ est un isomorphisme, ce qui équivaut à :
$\forall x \in A \quad 1 \otimes x = x \otimes 1$ dans $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A$ (car alors $\forall (a,b) \in A^2 \quad a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = 1 \otimes ab$). Sans cette hypothèse, la proposition fondamentale 73 (dont dépendent beaucoup d'autres résultats) n'est plus forcément vérifiée. En fait, on peut voir que l'hypothèse de solidité n'est pas vraiment restrictive (« lemme de cœur » de Bousfield–Kan — cf. [10], chapitre I, où l'on trouvera également une description de tous les anneaux solides). De toute manière, nous n'aurons à utiliser les résultats de cette section que pour des sous–anneaux de $\mathbb{Q}$ et des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, lesquels sont trivialement solides.

Proposition 68 *Soit A un anneau commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est solide,*
2. *Pour tout A-module M, le morphisme canonique $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M \to M$ est un isomorphisme,*
3. *$\mathbf{Mod}_A$ est une sous–catégorie pleine de $\mathbf{Ab}$.*

Démonstration : – 1) ⇒ 2) : A solide signifie que 2) est vraie pour $A = M$, donc, le produit tensoriel commutant aux sommes directes, pour tout A-module libre M. Dans le cas général, considérons une présentation libre $L' \to L \to M \to 0$ de M : dans le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L' & \longrightarrow & A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L & \longrightarrow & A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes, donc la troisième aussi.
– 2) ⇒ 3) : soient M, M' des A-modules. Un morphisme de groupes abéliens de M vers M' induit un morphisme de A-modules $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M \to A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} M'$, qui s'identifie par hypothèse au morphisme de départ, lequel est donc A-linéaire.
– 3) ⇒ 1) : l'application $A \xrightarrow{f} A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A \quad x \longmapsto 1 \otimes x$ est $\mathbb{Z}$-linéaire, donc A-linéaire, où $A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} A$ est un A-module par $\lambda \cdot (a \otimes b) = (\lambda a) \otimes b$, donc $\forall x \in A \quad x \otimes 1 = x \cdot f(1) = f(x) = 1 \otimes x$, d'où le résultat.

En particulier, si un groupe abélien peut être muni d'une structure de A-module (où A est solide), celle–ci est unique ; la structure de A-module est donc « rigide », ce qui justifie la terminologie. Nous allons voir que le foncteur de Bousfield–Kan défini ci–après fournit, à homotopie près, une complétion relativement à des ensembles simpliciaux dont les groupes d'homotopie peuvent être construits par extensions successives de A-modules (avec des conditions supplémentaires) — le cas de π_1 étant un petit peu plus délicat en raison de la non–commutativité ; la solidité évite donc d'avoir à considérer des espaces topologiques munis d'une structure additionnelle (sur leurs groupes d'homotopie).

4.1.2 Le foncteur $\mathcal{C}_A$

Soit X un ensemble simplicial. L'itération du foncteur C_A défini au paragraphe 2.4.2 permet de construire un espace cosimplicial augmenté $\mathfrak{C}_A X$: pour $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ on pose $(\mathfrak{C}_A X)^n = C_A^{n+1} X$, avec $d^i = C_A^i \varphi_{C_A^{k-i} X} : (\mathfrak{C}_A X)^{k-1} \to (\mathfrak{C}_A X)^k$ et $s^j = C_A^j \psi_{C_A^{k-j} X} : (\mathfrak{C}_A X)^{k+1} \to (\mathfrak{C}_A X)^k$ (où φ et ψ sont les transformations naturelles introduites au pargraphe 2.4.2) ; que (C_A, φ, ψ) soit une monade implique formellement que les identités cosimpliciales sont vérifiées. Dès que l'on pointe X [97], on peut remplacer C_A par $\widetilde{L}_A$, de sorte que les $\mathfrak{C}_A X^n$ deviennent, pour $n \geq 0$, des groupes simpliciaux ; $\mathfrak{C}_A X$ devient même un pseudo–groupe cosimplicial : comme pour tout $E \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}$, ψ_E est un morphisme de modules simpliciaux (et que $\widetilde{L}_A$ transforme morphismes de modules simpliciaux en morphismes de modules simpliciaux), tous les s^j sont des morphismes de groupes simpliciaux, et $\widetilde{L}_A \varphi_E$ est un morphisme de modules simpliciaux, donc pour $i > 0$ les d^i sont des morphismes de groupes simpliciaux. Par la proposition 37, $\mathfrak{C}_A X$ est fibrant et plus généralement on voit facilement que si $f : X \to Y$ est un morphisme surjectif, $\mathfrak{C}_A(f) : \mathfrak{C}_A X \to \mathfrak{C}_A Y$ (la construction de $\mathfrak{C}_A$ est évidemment fonctorielle) est une fibration.

Le foncteur $\mathcal{C}_A : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ est défini par $\mathcal{C}_A X = \mathrm{Tot}\,\mathfrak{C}_A X$; pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{C}_{A,n} X = \mathrm{Tot}_n\,\mathfrak{C}_A X$. Comme Δ et les $\Delta^{[n]}$ sont évidemment cofibrants dans $c\mathbf{S}$, $\mathcal{C}_A X$ et $\mathcal{C}_{A,n} X$ sont toujours fibrants (par **(SM7)**), les morphismes canoniques $\mathcal{C}_{A,n+1} X \to \mathcal{C}_{A,n} X$ sont des fibrations (ainsi $\mathcal{C}_A X$ est limite projective de la tour de fibrations $(\mathcal{C}_{A,n} X)$), et un morphisme surjectif $X \to Y$ induit une fibration $\mathcal{C}_A X \to \mathcal{C}_A Y$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$ des fibrations $\mathcal{C}_{A,n} X \to \mathcal{C}_{A,n} Y$). Comme $\mathfrak{C}_A X$ est augmenté, on dispose de transformations naturelles $\Phi : id \to \mathcal{C}_A$ et $\Phi_n : id \to \mathcal{C}_{A,n}$. Le foncteur $\mathcal{C}_A$ est appelé foncteur de *complétion de Bousfield–Kan* ; la suite de cette section justifiera cette terminologie.

Le paragraphe 2.4.3 montre que les foncteurs $\mathfrak{C}_A, \mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_{A,n}$ induisent des foncteurs (encore notés de la même façon) entre les catégories homotopiques correspondantes.

4.1.3 Généralisation fibrée

Soit X un ensemble simplicial : nous allons généraliser la construction précédente à la catégorie $\mathbf{S}_X$ en réalisant une « complétion fibrée » (i.e. fibre par fibre). On prolonge déjà le foncteur C_A en un foncteur $\dot{C}_A : \mathbf{S}_X \to \mathbf{S}_X$ en associant à $Y \xrightarrow{f} X$ la flèche $\dot{C}_A Y \xrightarrow{\dot{f}} X$ où $\dot{C}_A Y = \{\sum_{i=1}^m t_i x_i \in C_A Y \,|\, t_i \in A,\ x_i \in Y,\ \sum_i t_i = 1,\ f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_m)\}$ (degré par degré) et $\dot{f}$ associe à un élément $\sum_{i=1}^m t_i x_i \in \dot{C}_A Y$ de la forme précédente la valeur commune aux $f(x_i)$. En itérant le foncteur $\dot{C}_A$ sur $Y \to X$, on obtient un sous-espace cosimplicial augmenté $\dot{\mathfrak{C}}_A Y = (\dot{\mathfrak{C}}_A^{n+1} Y)_n$ de $\mathfrak{C}_A Y$ puis un ensemble simplicial $\dot{\mathcal{C}}_A Y = \mathrm{Tot}\,\dot{\mathfrak{C}}_A Y$ muni d'un morphisme encore noté $\dot{f}$ vers X : cela définit un foncteur $\dot{\mathcal{C}}_A : \mathbf{S}_X \to \mathbf{S}_X$ (encore muni d'une transformation naturelle $id \to \dot{\mathcal{C}}_A$ provenant de l'augmentation). Cette construction est de plus naturelle en X [98] : un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{b} & Y' \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow f' \\ X & \xrightarrow{a} & X' \end{array}$$

donne lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \dot{\mathcal{C}}_A Y & \xrightarrow{\dot{\mathcal{C}}_A b} & \dot{\mathcal{C}}_A Y' \\ \big\downarrow \dot{f} & & \big\downarrow \dot{f}' \\ X & \xrightarrow{a} & X' \end{array}$$

On pose de même $\dot{\mathcal{C}}_{A,n} Y = \mathrm{Tot}_n\,\dot{\mathfrak{C}}_A Y$; cela définit un foncteur (pour tout $n \in \mathbb{N}$) ayant la même propriété.

Le terme de complétion *fibrée* pour désigner le foncteur $\dot{\mathcal{C}}_A$ est justifié par la propriété suivante, qui est établie dans [10], chapitre I.

Proposition 69 *Soient $Y \xrightarrow{f} X$ une fibration pointée de $\mathbf{S}$, F sa fibre. Alors $\dot{\mathcal{C}}_A Y \xrightarrow{\dot{f}} X$ est une fibration dont la fibre s'identifie canoniquement à $\mathcal{C}_A F$. On a un résultat analogue avec $\dot{\mathcal{C}}_{A,n}$.*

4.2 Propriétés fondamentales

4.2.1 Espaces bons, complets

Définition 36 *Un ensemble simplicial X est dit :*

[97] on écartera en général le cas peu intéressant $X = \varnothing$.

[98] nous aurions donc en fait pu définir ce foncteur dans la catégorie dont les objets sont les flèches de $\mathbf{S}$, les morphismes étant définis comme pour $\mathbf{S}_X$.

– *A-**bon** si* $(\Phi_X)_* : \widetilde{H}_n(X;A) \to \widetilde{H}_n(\mathcal{C}_A X;A)$ *est un isomorphisme pour tout* $n \in \mathbb{N}$
– *A-**complet** si* $\Phi_X : X \to \mathcal{C}_A X$ *est une équivalence faible.*

Ainsi un espace A-complet est A-bon. Un inconvénient de la théorie de Bousfield–Kan est que tous les espaces ne sont pas bons [99] (cf. [10], ch. IV pour un contre–exemple).

Proposition 70 *Soit* $X \xrightarrow{f} Y$ *un morphisme de* $\mathbf{S}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\widetilde{H}_n(X;A) \xrightarrow{f_*} \widetilde{H}_n(Y;A)$ *est un isomorphisme pour tout* $n \in \mathbb{N}$
2. $\mathcal{C}_A X \xrightarrow{\mathcal{C}_A f} \mathcal{C}_A Y$ *est une équivalence d'homotopie*
3. $\mathcal{C}_A X \xrightarrow{\mathcal{C}_A f} \mathcal{C}_A Y$ *est une équivalence faible.*

Démonstration : – 1) $\Rightarrow$ 2) : 1) implique que $C_A f$ est une équivalence faible, donc $C_A^n f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (récurrence) et $\mathfrak{C}_A f$ aussi. La proposition 11 montre alors, comme Δ est cofibrant et $\mathfrak{C}_A E$ fibrant pour tout $E \in \operatorname{Ob} \mathbf{S}$, que $\mathcal{C}_A f$ est une équivalence d'homotopie.
– 3) $\Rightarrow$ 1) : $C_A X \xrightarrow{C_A f} C_A Y$ est un rétracte de $C_A \mathcal{C}_A X \xrightarrow{C_A \mathcal{C}_A f} C_A \mathcal{C}_A Y$. En effet, si l'on note, pour tout $T \in \operatorname{Ob} \mathbf{S}$, r_T le morphisme naturel $C_A \mathcal{C}_A T \xrightarrow{C_A(\alpha_T)} C_A^2 T \xrightarrow{\psi_T} C_A T$ (où $\alpha_T : \mathcal{C}_A T \to \mathcal{C}_{A,0} T \simeq C_A T$ est le morphisme canonique), et $i_T = C_A \Phi_T : C_A T \to C_A \mathcal{C}_A T$ on a $r_T i_T = id$ (car $r_T i_T = \psi_T C_A(\alpha_T \Phi_T) = \psi_T C_A(\varphi_T) = id$ puisque pour tout espace cosimplicial augmenté $(E^n)_{n \geq -1}$ la composée $E^{-1} \to \operatorname{Tot} E \to \operatorname{Tot}_0 E \simeq E^0$ est d^0) et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
C_A X & \xrightarrow{i_X} & C_A \mathcal{C}_A X & \xrightarrow{r_X} & C_A X \\
{\scriptstyle C_A f}\downarrow & & {\scriptstyle C_A \mathcal{C}_A f}\downarrow & & {\scriptstyle C_A f}\downarrow \\
C_A Y & \xrightarrow{i_Y} & C_A \mathcal{C}_A Y & \xrightarrow{r_Y} & C_A Y
\end{array}$$

commute par naturalité de r et i. $C_A \mathcal{C}_A f$ est comme $\mathcal{C}_A f$ une équivalence faible, donc par **(CM2)** $C_A f$ aussi, d'où 1).

Corollaire 13 *Un espace* X *est* A*-bon si et seulement si* $\mathcal{C}_A \Phi_X : \mathcal{C}_A X \to \mathcal{C}_A^2 X$ *est une équivalence faible (ou une équivalence d'homotopie).*

Proposition 71 *Il existe une transformation naturelle* $\Psi : \mathcal{C}_A^2 \to \mathcal{C}_A$ *telle que* $(\mathcal{C}_A, \Phi, \Psi)$ *soit une monade. De même, il existe pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *une transformation naturelle* $\Psi_n : \mathcal{C}_{A,n}^2 \to \mathcal{C}_{A,n}$ *telle* $(\mathcal{C}_{A,n}, \Phi_n, \Psi_n)$ *soit une monade.*

Nous admettrons ce résultat, établi dans [10], qui repose sur la proposition 2 et des calculs élémentaires (mais longs). Notons que les monades ainsi obtenues vérifient des conditions de compatibilité évidentes (relativement aux transformations naturelles $\mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_{A,n}$ et $\mathcal{C}_{A,n+1} \to \mathcal{C}_{A,n}$) et que pour $n = 0$ la monade associée au foncteur $\mathcal{C}_{A,0} \simeq C_A$ est celle déjà décrite.

Corollaire 14 *Pour tout ensemble simplicial* X*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. X *est* A*-bon,*
2. $\mathcal{C}_A X$ *est* A*-complet,*
3. $\mathcal{C}_A X$ *est* A*-bon.*

Cela résulte, d'après la proposition précédente (étant donné que la monade obtenue pour $\mathcal{C}_A$ induit de manière évidente une monade au niveau des catégories homotopiques), du corollaire 13 et de la proposition 1.

Nous admettrons la propriété suivante, établie dans [10] en utilisant la suite spectrale des espaces cosimpliciaux :

Proposition 72 *Tout* A*-module simplicial est un ensemble simplicial* A*-complet.*

[99] Cependant, ce type d'inconvénient est inévitable : si l'on souhaite avoir une théorie fournissant dans tous les cas un foncteur de complétion homotopique, on se heurte à l'existence de groupes qui ne sont pas bons : le complété d'un espace ayant un groupe d'homotopie mauvais n'aura pas les groupes d'homotopie que l'on attendrait — cf. [5].

4.2.2 Propriétés élémentaires

Un espace topologique ou un ensemble simplicial est dit *n-connexe* (où $n \in \mathbb{N}$) s'il est connexe par arcs et ses groupes d'homotopie d'ordre $\leq n$ sont triviaux [100]. La *connectivité* d'un espace connexe est la borne supérieure dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ des n tels qu'il soit n-connexe.

Proposition 73 *Soient X un ensemble simplicial et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\widetilde{H}_k(X;A) = 0$ pour $k \leq n$. Alors $\mathcal{C}_A X$ est n-connexe, de même que les fibres des morphismes canoniques $\mathcal{C}_{A,i+1}X \to \mathcal{C}_{A,i}X$ (pour tout $i \in \mathbb{N}$).*

(Noter que l'hypothèse signifie exactement que $C_A X$ est n-connexe)

Corollaire 15 *Soit X un ensemble simplicial connexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{C}_{A,n}X$ est nilpotent.*

Cela résulte de la proposition précédente et de la proposition 38.

Nous admettrons la proposition 73. Pour la démonstration (qui utilise des propriétés homotopiques des espaces cosimpliciaux et un résultat sur des foncteurs entre A-modules simpliciaux établi dans [12]), nous renvoyons à [10], de même que pour la proposition suivante.

Proposition 74 *Soient X un ensemble simplicial fibrant et (T_n) sa tour de Moore–Postnikov. Le morphisme canonique $\mathcal{C}_A X \to \varprojlim \mathcal{C}_A T_n$ est une équivalence d'homotopie.*

Proposition 75

- *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles simpliciaux. Le morphisme canonique $\coprod_{i\in I} \mathcal{C}_A X_i \to \mathcal{C}_A\big(\coprod_{i\in I} X_i\big)$ est une équivalence d'homotopie. Il en est de même en remplaçant $\mathcal{C}_A$ par $\mathcal{C}_{A,n}$ où $n \in \mathbb{N}$.*
- *Soient X, Y deux ensembles simpliciaux. Le morphisme canonique $\mathcal{C}_A(X \times Y) \to \mathcal{C}_A X \times \mathcal{C}_A Y$ est une équivalence d'homotopie.*

Nous admettrons ces propriétés, dont la démonstration, fournie dans [10], repose sur le théoreme des modèles acycliques [101] (en ce qui concerne ce résultat, voir [20]).

Le premier point montre que l'on peut essentiellement se restreindre, au niveau homotopique, à étudier le foncteur $\mathcal{C}_A$ pour des espaces connexes.

Le second montre que si G est un groupe simplicial, $\mathcal{C}_A G$ est naturellement muni d'une loi interne vérifiant à homotopie près toutes les propriétés d'un groupe simplicial — en fait l'associativité et l'existence d'un élément neutre sont assurés systématiquement, mais l'existence du passage à l'inverse n'est exacte qu'à homotopie près (cf. [10]) ; le fait que l'on n'obtienne pas forcément un groupe simplicial induit dans la démonstration de la propriété de conservation des fibrations principales une difficulté mineure — cf. paragraphe ci–après.

4.2.3 Préservation des fibrations principales et conséquences

La théorie de la complétion de Bousfield–Kan repose sur le résultat fondamental suivant :

Proposition 76 *Soit $f : X \to Y$ une fibration principale entre ensembles simpliciaux pointés connexes de fibre F connexe. Alors $\mathcal{C}_A f : \mathcal{C}_A X \to \mathcal{C}_A Y$ est une fibration principale à homotopie près et l'injection de $\mathcal{C}_A F$ dans sa fibre est une équivalence d'homotopie.*

Comme X est non vide et Y connexe, f est surjective, donc $\mathcal{C}_A f$ est une fibration. Le point « délicat » est l'assertion sur la fibre, pour laquelle nous renvoyons à [10] (ch. II). En effet, ceci admis, appliquons le théorème de classification (proposition 27) à f : on a un carré commutatif cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & EG \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{v} & BG \end{array}$$

[100] cette propriété ne dépend pas du point de base car l'espace est connexe (par arcs).

[101] on notera l'analogie entre le deuxième point de la proposition et la formule de Künneth, qui repose également sur ce théoreme (cf. [20]).

où p est une fibration principale avec EG contractile [102]. En lui appliquant le foncteur $\mathcal{C}_A$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_A X & \xrightarrow{\mathcal{C}_A u} & \mathcal{C}_A(EG) \\
{\scriptstyle \mathcal{C}_A f}\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{C}_A p}\downarrow \\
\mathcal{C}_A Y & \xrightarrow{\mathcal{C}_A v} & \mathcal{C}_A(BG)
\end{array}$$

où $\mathcal{C}_A(EG)$ est par la proposition 73 contractile, donc $\mathcal{C}_A p$ est une fibration principale à homotopie près (de groupe $\Omega(\mathcal{C}_A(BG))$ — cf. [21] pour la construction de ce groupe simplicial et la fibration principale associée [103]) : il suffit donc pour voir que $\mathcal{C}_A p$ est principale à homotopie près de montrer que ce diagramme est cartésien à homotopie près.

Pour cela, introduisons le produit fibré Z tel qu'on ait un carré commutatif cartésien

$$\begin{array}{ccc}
Z & \longrightarrow & \mathcal{C}_A(EG) \\
{\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{C}_A p}\downarrow \\
\mathcal{C}_A Y & \xrightarrow{\mathcal{C}_A v} & \mathcal{C}_A(BG)
\end{array}$$

La propriété universelle de Z fournit un morphisme t de la fibration $\mathcal{C}_A X \xrightarrow{\mathcal{C}_A f} \mathcal{C}_A Y$ vers la fibration $Z \xrightarrow{g} \mathcal{C}_A Y$ qui induit une équivalence d'homotopie entre les fibres (elles sont toutes deux naturellement homotopiquement équivalentes à $\mathcal{C}_A F$, à cause du résultat admis sur la fibre — appliqué à f et p — et de ce que la fibre d'une image réciproque s'identifie à la fibre de la fibration initiale) ; en utilisant le morphisme induit par t entre les suites exactes longues d'homotopie de $\mathcal{C}_A f$ et g et le lemme des cinq, on obtient que t est une équivalence faible (donc une équivalence d'homotopie puisque $\mathcal{C}_A X$ et Z sont fibrants).

Cette proposition a de nombreuses applications importantes ; nous ne démontrons ici en détail que la dernière mentionnée. On trouvera dans [10] des variantes et des généralisations de ce résultat.

Corollaire 16 *Soit $f : X \to Y$ une fibration nilpotente pointée de fibre (connexe) F. Alors $\mathcal{C}_A f : \mathcal{C}_A X \to \mathcal{C}_A Y$ est une fibration nilpotente, et l'inclusion de $\mathcal{C}_A F$ dans sa fibre est une équivalence d'homotopie.*

Cela découle de la proposition précédente, des propositions 31, 73 et 74 et du corollaire 2.

Corollaire 17 *Soit X un ensemble simplicial connexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{A,n} X$ est A-complet.*

Il suffit de raisonner par récurrence en utilisant les propositions 72, 38 et 76.

Corollaire 18 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme pointé entre ensembles simpliciaux connexes pointés tel que $f_* : \widetilde{H}_n(X; A) \to \widetilde{H}_n(Y; A)$ soit un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout ensemble simplicial connexe pointé Z, $f^* : \pi(Y, \mathcal{C}_A Z) \to \pi(X, \mathcal{C}_A Z)$ (où $\pi(E, E')$ désigne, pour tous ensembles simpliciaux pointés E et E' avec E' fibrant, l'ensemble des classes d'homotopie pointée de morphismes de E vers E') est une bijection.*

Démonstration : Il s'agit d'un raisonnement purement formel, variation sur la preuve de la proposition 4. Soit $a : X \to \mathcal{C}_A Z$ un morphisme (pointé). Nous allons construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une application pointée $r_n : Y \to \mathcal{C}_{A,n} Z$ telle que les diagrammes suivants commutent à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{a} & \mathcal{C}_A Z \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{r_n} & \mathcal{C}_{A,n} Z
\end{array} \tag{14}$$

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xrightarrow{r_{n+1}} & \mathcal{C}_{A,n+1} Z \\
\| & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{r_n} & \mathcal{C}_{A,n} Z
\end{array} \tag{15}$$

Nous verrons de plus que ces morphismes sont uniques à homotopie (pointée) près. Comme $\mathcal{C}_A Z = \varprojlim \mathcal{C}_{A,n} Z$, cela prouvera le corollaire (en utilisant [10], ch. IX, corollaire 3.2).

[102] i.e. $EG \to *$ est une fibration de Kan triviale.

[103] il n'y a à équivalence d'homotopie près qu'une fibration de base donnée et d'espace total contractile — cf. proposition 26 (la même démonstration vaut pour des fibrations non forcément principales, avec la différence que, un morphisme de fibrations non forcément principales n'étant pas toujours un isomorphisme, on n'obtient plus en général une équivalence mais seulement une équivalence d'homotopie).

Par la proposition 70, $\mathcal{C}_A f : \mathcal{C}_A X \to \mathcal{C}_A Y$ est une équivalence d'homotopie, de même que $\Phi_{\mathcal{C}_{A,n}Z} : \mathcal{C}_{A,n}Z \to \mathcal{C}_A(\mathcal{C}_{A,n}Z)$ par le corollaire 17 ; notons i et j_n des inverses homotopiques (on vérifie aussitôt que l'on peut les choisir, ainsi que les homotopies, pointés). On choisit pour r_n la composée

$$Y \xrightarrow{\Phi_Y} \mathcal{C}_A Y \xrightarrow{i} \mathcal{C}_A X \xrightarrow{\mathcal{C}_A a} \mathcal{C}_A\mathcal{C}_A Z \xrightarrow{\mathcal{C}_A pr} \mathcal{C}_A\mathcal{C}_{A,n} Z \xrightarrow{j_n} \mathcal{C}_{A,n} Z$$

où $pr : \mathcal{C}_A Z \to \mathcal{C}_{A,n} Z$ est le morphisme canonique.

Comme les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_X"'] & Y \arrow[d, "\Phi_Y"'] \\ \mathcal{C}_A X & \mathcal{C}_A Y \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "pr\circ a"] \arrow[d, "\Phi_X"'] & \mathcal{C}_{A,n} Z \\ \mathcal{C}_A X \arrow[r, "\mathcal{C}_A(pr\circ a)"] & \mathcal{C}_A\mathcal{C}_{A,n} Z \arrow[u, "j_n"] \end{tikzcd}$$

commutent à homotopie près, il en est de même pour (14).

Tout autre morphisme R rendant commutatif à homotopie près ce diagramme est homotope[104] à r_n car le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_A X \arrow[r, "\mathcal{C}_A a"] \arrow[d, "\mathcal{C}_A f"'] & \mathcal{C}_A\mathcal{C}_A Z \arrow[d] \\ \mathcal{C}_A Y \arrow[r, "\mathcal{C}_A R"] & \mathcal{C}_A\mathcal{C}_{A,n} Z \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près, donc $\mathcal{C}_A R$ est homotope à $\mathcal{C}_A Y \xrightarrow{i} \mathcal{C}_A X \xrightarrow{\mathcal{C}_A(pr\circ a)} \mathcal{C}_A\mathcal{C}_{A,n} Z$, et comme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\Phi_Y"'] & \mathcal{C}_{A,n} Z \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{C}_{A,n}Z}"'] \\ \mathcal{C}_A Y \arrow[r, "\mathcal{C}_A R"] & \mathcal{C}_A\mathcal{C}_{A,n} Z \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près, R est homotope à $Y \xrightarrow{\Phi_Y} \mathcal{C}_A Y \xrightarrow{\mathcal{C}_A R} \mathcal{C}_A\mathcal{C}_{A,n} Z \xrightarrow{j_n} \mathcal{C}_{A,n} Z$, d'où l'unicité homotopique et la commutation à homotopie près de (15), car $R = Y \xrightarrow{r_{n+1}} \mathcal{C}_{A,n+1} Z \to \mathcal{C}_{A,n} Z$ convient aussi (pour faire commuter à homotopie près (14)), ce qui achève la démonstration.

4.3 Interprétation en termes de complétion

4.3.1 Ensembles simpliciaux A-nilpotents

Définition 37 *Un groupe G est dit A-**nilpotent** s'il existe une suite décroissante finie $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ de sous–groupes de G telle que*
- *$H_0 = G$, $H_n = \{1\}$,*
- *pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ $(G, H_i) \subset H_{i+1}$ (où (G, H_i) désigne le sous–groupe de G engendré par les commutateurs d'un élément de G et d'un élément de H_i),*
- *pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ le groupe abélien H_i/H_{i+1} admet une structure de A-module[105].*

<u>Exemples</u> :

- un groupe nilpotent est un groupe $\mathbb{Z}$-nilpotent.
- un groupe abélien est A-nilpotent s'il admet une structure de A-module, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.
- un groupe *fini* est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nilpotent, où p est un nombre premier, si et seulement si c'est un p-groupe.

Définition 38 *Un ensemble simplicial connexe pointé est dit A-**nilpotent** s'il est nilpotent et si tous ses groupes d'homotopie sont A-nilpotents. On note $\mathcal{N}_A$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{S}^*$ formée de ses espaces.*

[104] dans cette démonstration tous les morphismes et toutes les homotopies sont supposés préserver les points de base.
[105] laquelle est alors par la proposition 68 unique.

Ainsi un A-module simplicial est A-nilpotent ; un espace $\mathbb{Z}$-nilpotent est un espace nilpotent.

Comme dans le cas des espaces nilpotents, on a les propriétés suivantes (cf. [10], ch. III) :

Proposition 77 *Soit $f : X \to Y$ une fibration principale entre ensembles simpliciaux pointés connexes, de fibre F connexe. Si deux des espaces X, Y et F sont A-nilpotents, le troisième l'est également.*

Proposition 78 *Soit (T_n) la tour de Moore–Postnikov d'un ensemble simplicial pointé fibrant connexe et A-nilpotent. Les fibrations $T_{n+1} \to T_n$ peuvent s'écrire, à homotopie près, comme composées de fibrations principales associées à des A-modules simpliciaux dont les π_k sont triviaux pour $k \neq n$.*

De manière analogue au corollaire 17, on en déduit, en utilisant les propositions 76, 72 et 74 :

Corollaire 19 *Un espace pointé, fibrant, connexe et A-nilpotent est A-complet.*

C'est surtout la variante suivante qui nous sera utile.

Corollaire 20 *Soit X un espace pointé fibrant connexe et A-nilpotent. Le morphisme naturel $\theta_X = ((\Phi_n)_X)_{n\in\mathbb{N}} : X \to (\mathcal{C}_{A,n}X)_{n\in\mathbb{N}}$ est une pro–équivalence faible*[106] *en ce sens que pour tout $i \in \mathbb{N}$ le morphisme induit $(\theta_X)_* : \pi_i X \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \pi_i(\mathcal{C}_{A,n}X)$ est un isomorphisme.*

Des résultats sur les tours (notamment une variante de la proposition 76) et la proposition 78 permettent (cf. [10]) de se ramener au cas où X est un A-module simplicial ; dans ce cas, cela découle du calcul de suite spectrale de la preuve du lemme 2.7. du chapitre II et de la proposition 5.2 du chapitre IX de [10].

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_{A,k}$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{S}^*$ formée des ensembles simpliciaux pointés connexes X tels qu'il existe une suite finie $X = T_k \to T_{k-1} \to \ldots \to T_0 \to *$ dont chaque flèche est une fibration principale de groupe un A-module simplicial. Par la proposition 77, $\mathcal{N}_{A,k}$ est une sous–catégorie (pleine) de $\mathcal{N}_A$; notons que pour tout ensemble simplicial pointé connexe X, $\mathcal{C}_{A,k}$ est un objet de $\mathcal{N}_{A,k}$ (par la proposition 38) ; la proposition 78 permet d' « approcher » en un sens fort un objet de $\mathcal{N}_A$ par des objets des $\mathcal{N}_{A,n}$.

4.3.2 Le théorème principal

Soient $\mathcal{H}_c$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Ho}(\mathbf{S}^*)$ formée des types d'homotopie d'espaces pointés connexes et $\mathcal{H}N_A$ (resp. $\mathcal{H}N_A^f$) la sous–catégorie pleine de $\mathcal{H}_c$ formée des types d'homotopie d'objets de $\mathcal{N}_A$ (resp. d'objets de $\mathcal{N}_A$ n'ayant qu'un nombre fini de groupes d'homotopie non triviaux).

La proposition suivante entraîne facilement le théorème fondamental de la théorie de Bousfield–Kan (corollaire 22).

Proposition 79 *Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{H}_c$, les morphismes naturels $\theta_{(\mathcal{C}_{A,n}X)_n}$ et $(\mathcal{C}_{A,n}\theta_X)_n$ (où θ désigne la transformation naturelle induite dans $\mathcal{H}_c$ par $(\Phi_n)_n$) de $(\mathcal{C}_{A,n}X)_n$ vers $(\mathcal{C}_{A,n}\mathcal{C}_{A,n}X)_n$ sont égaux et sont des pro–équivalences faibles.*

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $\theta_{\mathcal{C}_{A,n}X} : \mathcal{C}_{A,n}X \to (\mathcal{C}_{A,m}\mathcal{C}_{A,n}X)_m$ est une pro–équivalence faible d'après le corollaire 20 et les considérations de la fin du paragraphe précédent, donc $\theta_{(\mathcal{C}_{A,n}X)_n} : (\mathcal{C}_{A,n}X)_n \to (\mathcal{C}_{A,m}\mathcal{C}_{A,n}X)_{n,m}$ [107] est aussi une pro–équivalence faible. La proposition 3 montre que c'est également le cas pour $\theta_{(\mathcal{C}_{A,n}X)_n} : (\mathcal{C}_{A,n}X)_n \to (\mathcal{C}_{A,n}\mathcal{C}_{A,n}X)_n$. Le fait que θ provienne d'une monade (proposition 71) implique alors formellement le reste de la proposition.

Corollaire 21 *Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{H}_c$ et tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $\widetilde{H}_i(X;A) \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{H}_i(\mathcal{C}_{A,n}X;A)$ est un isomorphisme.*

(en termes vagues, on peut dire qu'en remplaçant $\mathcal{C}_A$ par le pro–foncteur $(\mathcal{C}_{A,n})_n$, tout espace devient A-bon)

Démonstration : Il suffit de voir que le morphisme canonique $C_AX \to (C_A\mathcal{C}_{A,n}X)_n$ est une pro–équivalence faible, mais cela découle de ce que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $C_AX \to (C_A\mathcal{C}_{A,n}X)_n$ est un rétracte naturel[108] de $\mathcal{C}_{A,n}X \to \mathcal{C}_{A,n}\mathcal{C}_{A,n}X$, ce qui se prouve exactement comme dans la démonstration de la proposition 70 en remplaçant $\mathcal{C}_A$ par $\mathcal{C}_{A,n}$.

[106] c'est la notion de $\natural$-isomorphisme de [5].
[107] on commet un abus de notation sur θ sans importance d'après ce qui suit.
[108] i.e. avec des conditions de compatibilité évidentes des rétractions vis-à-vis des morphismes naturels $\mathcal{C}_{A,n+1} \to \mathcal{C}_{A,n}$.

Corollaire 22 *Notons, pour tout ensemble simplicial fibrant X, $(T_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ la tour de Moore–Postnikov de X. Le foncteur induit par $(T_n\mathcal{C}_{A,n})_{n\in\mathbb{N}} : \mathcal{H}_c \to \mathbf{To}(\mathcal{H}N_A^f) \hookrightarrow \mathrm{pro} - \mathcal{H}N_A^f$ est une complétion.*

Il s'agit d'une conséquence directe des résultats du paragraphe 2.3.1, des propositions 79, 4 et 3 et du corollaire 4.4 de [5] (celui–ci, également établi dans [10], chapitre III (proposition 3.3) est en fait déduit d'un résultat plus général sur les complétions).

4.4 Application à la complétion profinie

Dans tout ce paragraphe, p désigne un nombre premier.

Si la construction de Bousfield–Kan fournit toujours un foncteur de complétion (contrairement à ce qui se passe pour la localisation — cf. § 4.5 ci–après), elle ne donne pas directement un foncteur de p-complétion profinie, i.e. de complétion dans la catégorie homotopique relativement à la sous–catégorie des espaces dont les groupes d'homotopie sont des p-groupes finis : pour $A = \mathbb{F}_p (= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ on obtient une complétion par rapport aux espaces dont les groupes d'homotopie sont p-nilpotents, ce qui n'est pas en général la même chose lorsque les groupes d'homotopie de l'espace considéré ne sont pas de type fini. Morel a remarqué dans [33] qu'en combinant cette construction à une « complétion profinie » [109] simpliciale élémentaire (obtenue en prenant le complété profini ensembliste degré par degré), on trouve une notion tout à fait générale de complétion p-profinie [110].

4.4.1 Ensembles simpliciaux profinis

Définition 39
- *Un ensemble simplicial X est dit **fini** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ X_n est un ensemble fini* [111]*. On note $\mathbf{S}f$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{S}$ formée des ensembles simpliciaux finis.*
- *Pour tout ensemble simplicial X, on désigne par $\mathfrak{R}(X)$ l'ensemble des relations d'équivalence R sur X (i.e. des suites de relations d'équivalence sur les X_n compatibles aux opérateurs de face et de dégénérescence* [112]*) telles que X/R soit un ensemble simplicial fini. On note $\widehat{\cdot}$ le foncteur $\mathbf{S} \to \mathrm{pro} - \mathbf{S}f \quad X \longmapsto \widehat{X} = (X/R)_{R\in\mathfrak{R}(X)}$ ($\mathfrak{R}(X)$ est un ensemble ordonné filtrant pour l'inclusion, donc une petite catégorie filtrante à gauche).*
- *On appelle **ensemble simplicial profini** tout objet de $\mathrm{pro} - \mathbf{S}f$.*

On vérifie aussitôt (à l'aide de la proposition 4 par exemple) que le foncteur $\widehat{\cdot} : \mathbf{S} \to \mathrm{pro} - \mathbf{S}f$ est une complétion.

Proposition 80 *Soient $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{S}$, $n \in \mathbb{N}$ et r une relation d'équivalence sur X_n telle que X_n/r soit fini. Il existe $R \in \mathfrak{R}(X)$ qui en degré n est plus fine que r.*

Démonstration : Définissons R ainsi : pour tous $k \in \mathbb{N}$ et tous $a, b \in X_k$, $(a\,R\,b) \iff (\forall \delta \in \hom_\Delta(\mathbf{n},\mathbf{k}) \quad \delta(a)\,r\,\delta(b))$ (on note δ pour $X(\delta) : X_k \to X_n$). Cela définit clairement une relation d'équivalence (compatible aux applications simpliciales) sur X [113] ; elle est dans $\mathfrak{R}(X)$ car X_n/r et les $\hom_\Delta(\mathbf{n},\mathbf{k})$ sont finis (l'application $(X/R)_k \longrightarrow (X_n/r)^{\hom_\Delta(\mathbf{n},\mathbf{k})} \qquad [t] \longmapsto (\delta(t))_{\delta\in\hom_\Delta(\mathbf{n},\mathbf{k})}$ — où $[t]$ désigne la classe de $t \in X_k$ dans $(X/R)_k$ — est par construction de R bien définie et injective).

Proposition 81 *Pour tout ensemble simplicial X et tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $H^n(\widehat{X};\mathbb{F}_p) \to H^n(X;\mathbb{F}_p)$ (où par définition $H^n(\widehat{X};\mathbb{F}_p) = \varinjlim_{R\in\mathfrak{R}(X)} H^n(X/R;\mathbb{F}_p)$) est un isomorphisme.*

(On pourrait remplacer $\mathbb{F}_p$ par n'importe quel groupe abélien *fini*)

Démonstration : Le morphisme canonique $\varinjlim_{R\in\mathfrak{R}(X)} \mathbb{F}_p^{(X/R)_n} \to \mathbb{F}_p^{X_n}$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$: l'injectivité est automatique ; pour la surjectivité, étant donné $f \in \mathbb{F}_p^{X_n}$, appliquer la proposition précédente à la relation d'équivalence sur X_n définie par f. En passant à la cohomologie (ce qui est légitime car quotient et limites inductives filtrantes commutent [114]), on obtient immédiatement le résultat.

---

[109] malheureusement celle–ci n'a pas les propriétés homotopiques que l'on pourrait attendre — elle ne fournit pas de complétion relativement aux espaces dont les groupes d'homotopie sont finis.

[110] en fait, [33] éclaire ces idées en introduisant une catégorie de modèles fermée qui rend plus naturelles les notions en jeu que la rapide exposition que nous en donnons.

[111] nous employons dans ce paragraphe une notion plus faible d'ensemble simplicial fini que celle que nous utilisons ailleurs (où un ensemble simplicial fini est un ensemble simplicial engendré par un sous–complexe fini, i.e. fini en chaque degré et égal à son k-squelette pour k assez grand).

[112] on peut alors définir un ensemble simplicial quotient ; on vérifie aussitôt que cette notion de quotient coïncide avec celle de quotient catégorique.

[113] c'est même de façon évidente la moins fine des relations d'équivalence sur X qui induise sur X_n une relation plus fine que r.

[114] il n'en est pas en général de même pour les limites projectives filtrantes, c'est pourquoi la proposition est énoncée en terme de cohomologie et non d'homologie.

4.4.2 La complétion p-profinie

Notons $\mathcal{H}_p^f$ la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ formée des types d'homotopie d'espaces X tel que $\pi_0 X$ soit fini et que les $\pi_n X$ $(n \geq 1)$ soient des p-groupes finis dont seul un nombre fini sont non triviaux.

Proposition 82 *Le foncteur* $\mathbf{S} \longrightarrow \text{pro} - \mathbf{S} \quad X \longmapsto (T_n \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,m} X/R)_{(n,m,R)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathfrak{R}(X)}$ *(les indices forment un ensemble ordonné filtrant pour l'ordre produit), où* $(T_n)_n$ *désigne le foncteur de Moore–Postnikov, induit un foncteur* $\mathbf{Ho}(\mathbf{S}) \longrightarrow \text{pro} - \mathcal{H}_p^f$ *qui est une complétion.*

Démonstration : Pour tout ensemble simplicial fini E et tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n_{\mathbb{F}_p} E$ est un ensemble simplicial fini, donc $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,m} E$ également pour tout $m \in \mathbb{N}$ (raisonner par récurrence sur m en utilisant l'expression « explicite » de la fibre des morphismes $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,m+1} E \to \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,m} E$ donnée dans [10], par exemple) ; comme cet ensemble simplicial est fibrant, tous ses π_k sont finis [115] ; pour $k \geq 1$ ce sont des p-groupes (raisonner encore par récurrence sur m en utilisant la proposition 38 — si l'on écarte le cas trivial $E = \varnothing$, en pointant E, on sait que $\mathfrak{C}_A E$ devient naturellement un pseudo–$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel cosimplicial). Cela montre que pour tout ensemble simplicial X les types d'homotopie des $T_n \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,m} X/R$ (où $(n, m, R) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathfrak{R}(X)$) sont dans $\mathcal{H}_p^f$. Il suffit donc de démontrer que :

1. si $f : X \to Y$ est un équivalence faible, alors f induit pour tout $n \in \mathbb{N}$ une pro–équivalence faible $f_* : (\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,n} X/R)_{R\in\mathfrak{R}(X)} \longrightarrow (\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,n} Y/S)_{S\in\mathfrak{R}(Y)}$,
2. si X a un type d'homotopie dans $\mathcal{H}_p^f$, le morphisme canonique $X \to (\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,n} X/R)_{(n,R)\in\mathbb{N}\times\mathfrak{R}(X)}$ est une pro–équivalence faible.

En effet, le corollaire 4.4 de [5] montre, combiné à 1), que le foncteur considéré induit bien un foncteur $\mathbf{Ho}(\mathbf{S}) \longrightarrow \text{pro} - \mathcal{H}_p^f$; combiné à 2) et à la proposition 4 (la condition b) de cette proposition étant satisfaite par la proposition 79 et parce que les $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,n} X/R$ sont finis pour $R \in \mathfrak{R}(X)$) il prouve que c'est une complétion.

Par la proposition 81, sous l'hypothèse de 1), $f^* : H^n(\widehat{Y}; \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^n(\widehat{X}; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f_* : H_n(\widehat{X}; \mathbb{F}_p) \longrightarrow H_n(\widehat{Y}; \mathbb{F}_p)$ également (en effet $H_n(\widehat{X}; \mathbb{F}_p) = \varprojlim_{R\in\mathfrak{R}(X)} H_n(X/R\,; \mathbb{F}_p) \simeq \varprojlim_{R\in\mathfrak{R}(X)} H^n(X/R\,; \mathbb{F}_p)^* \simeq H^n(\widehat{X}; \mathbb{F}_p)^*$ car pour E fini $H_n(E; \mathbb{F}_p)$ est fini, donc $H_n(E; \mathbb{F}_p) \simeq H_n(E; \mathbb{F}_p)^{**} \simeq H^n(E; \mathbb{F}_p)^*$ canoniquement). Une variante évidente de la proposition 70 en termes de pro–objets (qui s'établit de manière analogue) montre alors que pour tout $m \in \mathbb{N}$ $f_* : (\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,m} X/R)_{R\in\mathfrak{R}(X)} \longrightarrow (\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,m} Y/S)_{S\in\mathfrak{R}(Y)}$ est une pro–équivalence faible, d'où 1).

Sous l'hypothèse de 2), les $H_i(X\,; \mathbb{F}_p)$ sont finis pour tout $i \in \mathbb{N}$ (voir [42] ou [43]), ce qui, par un raisonnement tout à fait analogue au précédent, montre que $H_i(X\,; \mathbb{F}_p) \simeq H_i(\widehat{X}\,; \mathbb{F}_p)$; la finitude implique alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $R \in \mathfrak{R}(X)$ tel que $H_i(X\,; \mathbb{F}_p) \simeq H_i(X/R\,; \mathbb{F}_p)$ pour tout $i \leq n + 1$. Par le lemme 6. 2 du chapitre I de [10] (variante de notre proposition 73), on en déduit que pour $k \leq n \quad \pi_i(\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,k} X) \simeq \pi_i \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,k}(X/R)$; or comme X est $\mathbb{F}_p$-nilpotent $\pi_i X \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \pi_i \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,k} X$ (corollaire 20) [116], ce qui prouve 2) et achève la démonstration.

4.5 Application à la localisation des espaces nilpotents

Dans ce paragraphe, on suppose que A est un sous–anneau de $\mathbb{Q}$. C'est donc un anneau solide et $\mathbb{Z}$-*plat* [117] ; et il existe une partie multiplicative S de $\mathbb{Q}$ telle que $A = \mathbb{Z}[S^{-1}]$.

4.5.1 A-localisation des groupes nilpotents

On note $\mathbf{G}N$ (resp. $\mathbf{G}N_A$) la sous–catégorie pleine de $\mathbf{Grp}$ formée des groupes nilpotents (resp. A-nilpotents [118]).

Proposition 83 *Il existe un (unique à isomorphisme près) foncteur de localisation* $\mathbf{G}N \to \mathbf{G}N_A$ *; il prolonge le foncteur de localisation* $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Mod}_A \quad G \longmapsto A \otimes G$ *— on le notera donc encore* $G \longmapsto A \otimes G$*. Ce foncteur est exact.*

On peut prouver ce résultat de manière purement algébrique (cf. [28] pour une approche élémentaire dans un cas particulier ; une méthode plus profonde repose sur les suites spectrales introduites dans [24]), ce qui est assez délicat. La construction de Bousfield–Kan permet une approche topologique aboutissant à une démonstration rapide : on définit $A \otimes G$ comme $\pi_1(\mathcal{C}_A K(G, 1))$, où $K(G, 1)$ est l'espace d'Eilenberg–MacLane dont le groupe fondamental est

[115] en effet si K est un ensemble simplicial fibrant, $\pi_k K$ est pour tout $k \in \mathbb{N}$ un sous–quotient de X_k — cf. [21].

[116] on peut supposer X fibrant car on travaille en fait dans la catégorie homotopique, et le fait que X ne soit pas forcément connexe ne pose pas de problème en raison de la proposition 75.

[117] la description de [10] des anneaux solides montre qu'en fait tout anneau solide et $\mathbb{Z}$-plat est (isomorphe à) un sous–anneau de $\mathbb{Q}$.

[118] On a une caractérisation des groupes A-nilpotents parmi les groupes nilpotents plus intuitive que la définition que nous avons donnée : ce sont les groupes nilpotents tels que pour tout $s \in S$ l'application $x \longmapsto x^s$ soit une bijection — cf. [10].

(isomorphe à) G[119]. La démonstration de la proposition devient alors aisée grâce aux résultats dont nous disposons sur le foncteur $\mathcal{C}_A$ (notamment la proposition 76) ; elle est analogue à celle de la proposition 84 ci–après. Nous renvoyons à [10] pour plus de détails.

4.5.2 A-localisation des espaces nilpotents

Le corollaire 18 montre que le foncteur induit par $\mathcal{C}_A$ entre la sous–catégorie pleine de $\mathcal{H}_c$ formée des types d'homotopies d'espaces (pointés connexes) A-bons et la sous–catégorie pleine formée des types d'homotopie d'espaces du type $\mathcal{C}_A X$ (où X est un espace pointé connexe) est une localisation (on ne doit pas s'attendre à obtenir une localisation générale vu que tous les espaces ne sont pas bons). En fait, nous allons voir qu'en se restreignant aux espaces nilpotents, il fournit une théorie de la A-localisation pleinement satisfaisante vu qu'il localise (au sens algébrique usuel) les groupes d'homotopie et d'homologie. On peut montrer, par des techniques totalement différentes et beaucoup moins explicites, que, dans des contextes bien plus généraux, il existe des foncteurs de localisation en homotopie (cf. le dernier chapitre de [21]), mais on ne peut espérer avoir un comportement toujours aussi naturel vis-à-vis des groupes d'homotopie et d'homologie que dans le cadre développé ici.

On note $\mathcal{H}N$ la catégorie $\mathcal{H}N_{\mathbb{Z}}$ des types d'homotopie d'espaces connexes pointés nilpotents.

Proposition 84 *Soit X un objet de $\mathcal{H}N$.*
- *X est A-bon,*
- *$\mathcal{C}_A X$ est A-nilpotent,*
- *les morphismes canoniques $\pi_n X \to \pi_n \mathcal{C}_A X$ et $\widetilde{H}_n(X;\mathbb{Z}) \to \widetilde{H}_n(\mathcal{C}_A X;\mathbb{Z})$ induisent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ des isomorphismes $A \otimes \pi_n X \simeq \pi_n \mathcal{C}_A X$ et $A \otimes \widetilde{H}_n(X;\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_n(\mathcal{C}_A X;\mathbb{Z})$.*

Démonstration : Traitons d'abord le cas où X est un (type d'homotopie d') espace ayant (au plus) un groupe d'homotopie non nul G, supposé abélien, en degré $n \in \mathbb{N}^*$: X est donc isomorphe au (type d'homotopie de) l'espace d'Eilenberg–MacLane $K(G,n)$[120]. Le morphisme canonique $K(G,n) \to K(A \otimes G, n)$ induit une équivalence d'homotopie entre $\mathcal{C}_A K(G,n)$ et $K(A \otimes G, n)$: en effet ce morphisme induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans A[121] et il suffit d'appliquer les propositions 72 et 70. Cela établit aussitôt le résultat pour X ($K(A \otimes G, n)$ est un A-module simplicial donc un espace A-nilpotent, puis A-complet — corollaire 19, donc X est A-bon par le corollaire 14).

Supposons à présent que $X \xrightarrow{f} B$ est une fibration principale entre espaces connexes pointés nilpotents de fibre F connexe et que la proposition est prouvée pour les types d'homotopie de X et F. La proposition 76 montre, combinée à la proposition 77, que $\mathcal{C}_A X$ est A-nilpotent (donc X A-bon) ; on a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \pi_k F & \longrightarrow & \pi_k X & \xrightarrow{f_*} & \pi_k B & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle (\Phi_F)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Phi_X)_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Phi_B)_*} & \\
\cdots \longrightarrow & \pi_k \mathcal{C}_A F & \longrightarrow & \pi_k \mathcal{C}_A X & \xrightarrow{(\mathcal{C}_A f)_*} & \pi_k \mathcal{C}_A B & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

qui (les groupes de la ligne inférieure étant A-nilpotents) induit par la proposition 83 un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & A \otimes \pi_k F & \longrightarrow & A \otimes \pi_k X & \longrightarrow & A \otimes \pi_k B & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & \pi_k \mathcal{C}_A F & \longrightarrow & \pi_k \mathcal{C}_A X & \longrightarrow & \pi_k \mathcal{C}_A B & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Par hypothèse les flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes, donc la flèche verticale centrale aussi par le lemme des cinq, d'où l'assertion concernant les groupes d'homotopies de $\mathcal{C}_A X$; la propriété concernant les groupes d'homologie découle de ce que X est A-bon, de la proposition 70 et de la formule des coefficients universels : A est plat, donc $\widetilde{H}_n(X;A) \simeq A \otimes \widetilde{H}_n(X;\mathbb{Z})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de même pour $\mathcal{C}_A X$, dont les groupes d'homologie intégrale sont des A-modules car il en est de même pour ses groupes d'homotopie — utiliser ensuite des résultats de Serre établis dans [43].

Le cas général provient maintenant de la proposition 31 et du corollaire 15.

---

[119]voir les remarques du paragraphe suivant pour ce qui concerne ces espaces.

[120]pour ce qui concerne la construction de ces groupes simpliciaux, voir [21]. Le fait que le type d'homotopie de X est forcément le même que celui de $K(G,n)$ peut se voir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour $n = 0$ c'est évident ; pour $n > 0$, X et $K(G,n)$ doivent avoir le type d'homotopie d'un $BK(G, n-1)$, lequel est unique à homotopie près car obtenu à partir de l'axiome **(CM4)** (il s'agit d'une propriété générale des catégories de modèles fermées) — cf. §2.2.3 ; on peut aussi le voir (dans le cas topologique) grâce au théorème 10 de [44], chapitre 8, §1.

[121]voir [18] pour ce qui concerne l'homologie de $K(G,n)$.

Corollaire 23 *Etant donné un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces connexes pointés nilpotents, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $f_* : \mathcal{C}_A X \to \mathcal{C}_A Y$ *est une équivalence d'homotopie (ou une équivalence faible),*
2. $f_* : A \otimes \widetilde{H}_n(X\,;\mathbb{Z}) \to A \otimes \widetilde{H}_n(Y\,;\mathbb{Z})$ *est un isomorphisme pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,*
3. $f_* : A \otimes \pi_n X \to A \otimes \pi_n Y$ *est un isomorphisme pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

L'équivalence de 1) et 2) découle de la proposition 70, puisqu'on a un isomorphisme naturel $A \otimes \widetilde{H}_n(E\,;\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}_n(E\,;A)$ (A est $\mathbb{Z}$-plat) pour tout espace E [122]. L'équivalence de 1) et 3) résulte de la proposition précédente [123].

Corollaire 24 *Le foncteur $\mathcal{C}_A : \mathcal{H}N \to \mathcal{H}N_A$ est une localisation.*

Cela résulte de la proposition 84 et du corollaire 18.

Supposons à présent que S soit le complémentaire d'un idéal premier $p\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$, où $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier (i.e. A est le localisé $\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Z}$ relativement à cet idéal). Le foncteur $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}$ est appelé foncteur de *p-localisation.* Il n'est pas sans rapport avec le foncteur de « p-complétion » $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}$. En effet, comme $\mathbb{F}_p$ est un $\mathbb{Z}_p$-module, tout espace $\mathbb{F}_p$-nilpotent est $\mathbb{Z}_p$-nilpotent, et pour tout espace nilpotent X on a une équivalence d'homotopie canonique

$$\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p} X \simeq \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} X \tag{16}$$

par les propositions 84, 70 et la formule des coefficients universels (cf. [44] par exemple).

Si l'espace nilpotent X a de plus des groupes d'homotopies *finis*, $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p} X \simeq \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} X$. En effet, si G est un groupe abélien fini, $G \otimes \mathbb{Z}_p$ est un p-groupe fini, et l'on conclut grâce à la proposition 84 et au corollaire 19.

Nous allons à présent donner une propriété très simple de « passage du local au global » dans la théorie de la localisation des espaces nilpotents, qui repose sur l'analogue élémentaire suivant pour les groupes (qui donne une démonstration immédiate de la décomposition d'un groupe fini nilpotent en produit direct de p-groupes à l'aide des foncteurs $\cdot \otimes \mathbb{Z}_p$).

Proposition 85 *Soit G un groupe nilpotent fini. Le morphisme naturel $G \to \prod_p G \otimes \mathbb{Z}_p$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, est un isomorphisme.*

Démonstration : Par exactitude des foncteurs $\cdot \otimes \mathbb{Z}_p$, il suffit de traiter la cas où G est abélien, ou même un p-groupe abélien élémentaire, auquel cas la proposition devient triviale.

En combinant ce résultat à la proposition 84, il vient :

Corollaire 25 *Soit X un espace nilpotent dont les groupes d'homotopie sont finis. Le morphisme naturel $X \to \prod_p \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} X$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, est une équivalence faible.*

En utilisant le corollaire 24 et ce résultat, on en obtient la généralisation suivante en termes de morphismes :

Corollaire 26 *Soient X un espace nilpotent dont les groupes d'homotopie sont finis et E un espace nilpotent, où p est un nombre premier. L'application canonique $\pi(E, X) \to \prod_p \pi(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} E, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} X)$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, est une bijection ($\pi(A, B)$ désignant l'ensemble des classes d'homotopie de morphismes de A dans B).*

On peut généraliser ce type de résultats au cas où les groupes d'homotopie de X sont seulement de type fini : il faut alors tenir compte de la « structure rationnelle » de X, i.e. de $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} X$ (qui est automatiquement trivial dans le cas étudié ci–avant), l'analogue de la proposition 85 étant que le morphisme canonique $G \to \prod_p G \otimes \mathbb{Z}_p$ (où G est un groupe nilpotent de type fini) est injectif et a pour image l'ensemble des éléments dont toutes les composantes ont même image dans $G \otimes \mathbb{Q}$ — cf. [10], ch. V, § 6 ; on a des résultats analogues avec les avec les foncteurs de complétion $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}$ (cf. [10], ch. VI, § 8). Dans [46], Sullivan fournit une variante de cette décomposition homotopique des espaces nilpotents de type fini en termes de sa théorie de la complétion pour obtenir ce qu'il appelle un « génotype cohérent » contenant toute l'information homotopique.

[122] l'isomorphisme entre les groupes d'homologie de degré 0 est automatique vu que les espaces sont supposés connexes.
[123] même remarque pour π_0.

4.5.3 Quelques cas particuliers

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $S\cap\mathbb{N}^*$ telle que $(\prod_{i=0}^{n}\lambda_i)_n$ soit cofinale dans S pour l'ordre défini par la divisibilité : $A=\mathbb{Z}[S^{-1}]$ est la limite inductive (filtrante) de la suite de groupes abéliens

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{\lambda_1}\mathbb{Z}\xrightarrow{\lambda_2}\mathbb{Z}\to\cdots\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\lambda_n}\mathbb{Z}\to\cdots$$

et pour tout groupe abélien G, le localisé $G\otimes A$ est donc naturellement isomorphe à la limite inductive filtrante de la suite obtenue en tensorisant celle–ci par G.

Soit à présent X un H-groupe[124] connexe. Notons $\mu_n : X\to X$ l'élévation à la puissance λ_n, puis définissons par récurrence une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces, et des suites de morphismes $(i_n : Z_{n-1}\to Z_n)_{n\geq 1}$, $(j_n : Z_{n-1}\to Z_n)_{n\geq 1}$, $(p_n : Z_n\to Z_{n-1})_{n\geq 1}$, $(I_n : X\to Z_n)_{n\geq 0}$, $(P_n : Z_n\to X)_{n\geq 0}$ et $(\mu'_n : Z_n\to Z_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : on pose $Z_0=X$, $I_0=P_0=id$, $\mu'_0=\mu_0$; pour $n\geq 1$ on choisit une factorisation de $Z_{n-1}\sqcup Z_{n-1}\xrightarrow{id\sqcup\mu'_{n-1}}Z_{n-1}$ en $Z_{n-1}\sqcup Z_{n-1}\xrightarrow{i_n\sqcup j_n}Z_n\xrightarrow{p_n}Z_{n-1}$, où $i_n\sqcup j_n$ est une cofibration et p_n une fibration triviale[125]. On définit ensuite $I_n=i_n\cdot I_{n-1}$, $P_n=P_{n-1}\cdot p_n$ et $\mu'_n=P_n\cdot\mu_n\cdot I_n$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[d, "I_0"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "I_1"'] & \cdots \arrow[r] & X \arrow[r, "\mu_{n-1}"] \arrow[d, "I_{n-1}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "I_n"'] & \cdots \\ Z_0 \arrow[r, "j_1"] & Z_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z_{n-1} \arrow[r, "j_n"] & Z_n \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{17}$$

qui induit pour tout espace C un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi(C,X) \arrow[r, "(\mu_0)_*"] \arrow[d, "(I_0)_*"', "\simeq"] & \pi(C,X) \arrow[r] \arrow[d, "(I_1)_*"', "\simeq"] & \cdots \arrow[r] & \pi(C,X) \arrow[r, "(\mu_{n-1})_*"] \arrow[d, "(I_{n-1})_*"', "\simeq"] & \pi(C,X) \arrow[r] \arrow[d, "(I_n)_*"', "\simeq"] & \cdots \\ \pi(C,Z_0) \arrow[r, "(j_1)_*"] & \pi(C,Z_1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \pi(C,Z_{n-1}) \arrow[r, "(j_n)_*"] & \pi(C,Z_n) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Si l'on note X_A la limite inductive (filtrante) de la ligne horizontale du diagramme (17), on en déduit aussitôt, en utilisant la remarque de la note 47 :

Proposition 86 *Si C est* ***fini*** *(i.e. engendré par un sous–complexe fini) et $\pi(C,X)$ abélien, le morphisme naturel $\pi(C,X)\to\pi(C,X_A)$ induit un isomorphisme $\pi(C,X)\otimes A\simeq\pi(C,X_A)$.*

En utilisant la proposition 84, cela fournit, comme un H-groupe est nilpotent et que la multiplication sur ses groupes d'homotopie est induite par sa loi de groupe :

Corollaire 27 *On a un isomorphisme naturel $\mathcal{C}_AX\simeq X_A$.*

Cette construction explicite élémentaire de la localisation d'un H-groupe vaut également pour un co-H-groupe (i.e. un espace dont l'image dans $\mathbf{Ho(S)}^{op}$ est munie d'une structure de groupe, par exemple une suspension) nilpotent, en remplaçant l'élévation à la puissance λ_n par sa variante duale qui induit elle la multiplication par λ_n en (co)homologie.

5 La démonstration de Sullivan de la conjecture d'Adams

Conjecturée par Adams et prouvée par celui–ci dans le cas des fibrés en droites, l'assertion selon laquelle, pour tout entier k et tout élément ξ dans la K–théorie d'un complexe cellulaire fini, $k^n(\psi^k\xi-\xi)$ a un type d'homotopie fibrée sphérique stable trivial si n est assez grand, a fait l'objet de plusieurs démonstrations, dont on trouvera un survol dans [1]. Celle que donne Sullivan dans [46] et que nous exposons ici utilise, comme la première démonstration, pressentie par Quillen et établie par Friedlander (cf. [19]), le type d'homotopie étale : à l'aide du théorème de comparaison cohomologique présenté au paragraphe 3.4.3, Sullivan décrit les automorphismes de la K–théorie profinie avec le groupe $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, formé d'automorphismes discontinus de $\mathbb{C}$, mais qui agissent naturellement sur le type d'homotopie étale d'une variété algébrique complexe dans $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$, et la conjecture d'Adams apparaît comme un cas particulier de l'invariance du type d'homotopie fibrée sphérique stable sous cette action, que nous décrivons dans 5.1. Dans la

[124] que nous supposons ici, pour respecter le cadre général de cette section, simplicial ; la construction élémentaire et intuitive que nous donnons ici s'introduit évidemment plus naturellement dans le cas topologique, qui est équivalent au cas simplicial puisque nous travaillons à homotopie près.

[125] cette utilisation de l'axiome **(CM4)**b correspond simplement dans le cas topologique à la construction du cylindre de μ'_{n-1}.

sous–section 5.2, nous établissons que le classifiant des fibrations sphériques stables s'injecte homotopiquement dans le classifiant des fibrations sphériques stables complétées, dont on déduit rapidement la conjecture d'Adams (5.3).

Nous utilisons les foncteurs de complétion $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}$ pour classifier la K–théorie profinie : comme nous avons affaire à des espaces nilpotents de type fini, il est inutile d'employer les raffinements de la construction de Bousfield–Kan exposés dans 4.4, et l'on peut également se passer (comme le fait Sullivan dans le cadre de sa théorie de la complétion) de travailler avec des pro–espaces. Nous appliquons librement des foncteurs simpliciaux à des espaces topologiques, ce qui est légitime puisque l'on travaille en fait la plupart du temps dans les catégories homotopiques (même si par souci de brièveté nous raisonnons souvent comme s'il s'agissait d'espaces). Quelques difficultés techniques mineures apparaissent du fait de la fréquente nécessité d'intervertir des limites inductives ou projectives et certains foncteurs homotopiques, ainsi que, dans le cas réel, du fait que le théorème de comparaison cohomologique impose d'utiliser des variétés *complexes*.

Fait abstraction de ces complications, le fil conducteur de la démonstration est simple : la description des automorphismes de la K–théorie profinie se ramène, via les propositions 45 et 52, au cas des fibrés en droites complexes, qui se traite explicitement, son classifiant étant homotopiquement entièrement connu. Le point clé de 5.2, si l'on excepte des résultats genéraux sur les fibrations, réside dans la finitude des groupes d'homotopie de BG_∞ (i.e. des groupes d'homotopie stables des sphères) au niveau des revêtements universels, un calcul explicite facile (généralisant la notion de degré d'applications continues d'une sphère dans elle–même) réglant le cas des groupes fondamentaux. L'argument final consiste à remarquer que l'action homotopique sur le complété du fibré en sphères canonique sur la grassmannienne est triviale (au niveau du type d'homotopie fibrée).

Référence bibliographique principale : [46].

5.1 K–théorie profinie

Dans tout ce paragraphe, on se fixe un nombre premier p.

5.1.1 Définition, espaces classifiants

Définition 40 *Soit X un complexe cellulaire fini. On appelle K–**théorie** p-**profinie** de X le groupe abélien*

$$\widehat{K}_p(X) = \widetilde{K}(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{\mathbb{Z}}_p$$

(le corps de base $\mathbb{K}$ étant indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), où $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ désigne l'anneau $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ des entiers p-adiques.

Proposition 87 *Pour tout complexe cellulaire connexe fini X, on a un isomorphisme naturel*

$$\widehat{K}_p(X) \simeq \pi(X, \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(Gr_\infty))$$

(On conserve les notations du paragraphe 3.2.3 et de la section 4)

Cela résulte du corollaire 8 et de la proposition 7.2 du chapitre VI de [10] [126].

$Gr_\infty(\mathbb{C})$ est limite inductive filtrante dénombrable des grassmanniennes complexes, qui sont la réalisation topologique de variétés algébriques complexes (séparées) lisses, objets de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$ (cf. § 3.3.1). En appliquant la proposition 67 à une telle grassmannienne G, on obtient un isomorphisme entre les cohomologies de $G(\mathbb{C})$ et de $Gr_{\acute{e}t}$ à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, donc aussi entre leur homologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ [127], donc par une variante de la proposition 70 en termes de pro–objets (cf. [10], ch. III § 6) le morphisme canonique $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(G(\mathbb{C})) \to \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(G_{\acute{e}t})$ est une pro–équivalence faible. On en déduit facilement que $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(G(\mathbb{C}))$ est homotopiquement équivalent à la limite projective (filtrante) d'espaces représentant le pro–type d'homotopie $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(G_{\acute{e}t})$ (voir [10], ch. III, § 3), que nous noterons $(G_{\acute{e}t})_p$. Ainsi $\widehat{K}_p(X)$ est classifié (pour X complexe cellulaire connexe fini) par la limite inductive filtrante évidente des $(G_{\acute{e}t})_p$, que nous désignerons par $Gr_{\acute{e}t}(\mathbb{C})_p$ [128] ; nous noterons $Gr_{\acute{e}t,n}(\mathbb{C})_p$ les types d'homotopie isomorphes à $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(Gr_n(\mathbb{C}))$ obtenus par le même procédé (de sorte que $Gr_{\acute{e}t,n}(\mathbb{C})_p$ s'identifie à la limite inductive [129] des $Gr_{\acute{e}t,n}(\mathbb{C})_p$).

[126]Que les groupes d'homotopie de Gr_∞ soient de type fini découle des résultats de Bott (cf. [7]) ou plus élémentairement de ce que les $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) ont le type d'homotopie des complexes cellulaires *finis* $O_n(\mathbb{R})$ (resp. U_n), donc ont des groupes d'homologie de type fini, donc des groupes d'homotopie de type fini par un résultat de [42].

[127]en effet, une grassmannienne étant un complexe cellulaire fini, ses $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels d'homologie sont finis, donc ils s'identifient à leur bidual, i.e. au dual de ses $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de cohomologie.

[128] En effet, $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}$ commute à la limite inductive des grassmanniennes : $\mathcal{C}_{A,n}$ commute toujours aux limites inductives filtrantes (comme Tot_n), et il suffit donc de voir que l'on peut intervertir (à homotopie près) la limite inductive filtrante des grassmanniennes et la limite projective filtrante des $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,n}$, ce qui vient de ce que l'on peut échanger la limite inductive et les π_i (cf. note 47), et aussi la limite projective des $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p,n}$ des grassmanniennes et les π_i parce que ces espaces ont des groupes d'homotopie *finis* (ils sont de type fini comme ceux de la grassmannienne et $\mathbb{F}_p$-nilpotents) — ensuite on utilise le théorème 3.1 et le corollaire 3.5 du chapitre IX de [10].

[129]comme celle–ci est filtrante, il n'y a pas lieu de distinguer limite inductive et limite inductive homotopique — cf. [10], ch. XII, 3.5.

Dans le cas réel, on se ramène également à des objets de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$: la grassmannienne des sous–espaces vectoriels de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+k}$ s'identifie à l'espace homogène (topologique) principal[130] $O_{n+k}(\mathbb{R})/(O_n(\mathbb{R}) \times O_k(\mathbb{R}))$ (choisir une base orthonormée du sous–espace de dimension n ainsi que de son orthogonal) ; comme pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ l'inclusion $O_m(\mathbb{R}) \hookrightarrow O_m(\mathbb{C})$ est une équivalence d'homotopie (on le montre par récurrence sur m : pour $m = 1$ c'est évident ; la projection $O_{m+1}(\mathbb{R}) \to O_{m+1}(\mathbb{R})/O_m(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^m$ est une fibration localement banale, et de même $O_{m+1}(\mathbb{C}) \to O_{m+1}(\mathbb{C})/O_m(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^m_{\mathbb{C}}$ où $\mathbb{S}^m_{\mathbb{C}} = \{(x_0, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \sum_{i=0}^m x_i^2 = 1\}$ donc il suffit, en utilisant la suite exacte longue d'homotopie de ces fibrations et le lemme des cinq, de montrer que l'inclusion $\mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^m_{\mathbb{C}}$ est une équivalence d'homotopie. Définissons à cet effet $r : \mathbb{S}^m_{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^m$ par $r(x_0, \ldots, x_m) = (1+\sum_{k=0}^m (\operatorname{Im} x_k)^2)^{-1/2}(\operatorname{Re} x_0, \ldots, \operatorname{Re} x_m)$ et pour $t \in [0, 1]$ $h_t : \mathbb{S}^m_{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^m_{\mathbb{C}}$ par $h_t(x_0, \ldots, x_m) = (1 + t(2-t) \sum_{k=0}^m (\operatorname{Im} x_k)^2)^{-1/2}(x_0 - \imath t \operatorname{Im} x_0, \ldots, x_m - \imath t \operatorname{Im} x_m)$. On a $r \cdot i = id_{\mathbb{S}^m}$, et $(h_t)_t$ est une homotopie de $h_1 = i \cdot r$ à $h_0 = id_{\mathbb{S}^m_{\mathbb{C}}}$, d'où le résultat), donc la grassmannienne a la type d'homotopie de l'espace homogène principal $O_{n+k}(\mathbb{C})/(O_n(\mathbb{C}) \times O_k(\mathbb{C}))$, qui est la réalisation topologique d'une variété algébrique complexe (séparée) lisse objet de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$. On peut ensuite raisonner de même que dans le cas complexe avec ces variétés et obtenir une description étale $Gr_{ét}(\mathbb{R})_p = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}^*} Gr_{ét,n}(\mathbb{R})_p$ du type d'homotopie du classifiant de la K–théorie p-profinie réelle (pour les complexes cellulaires connexes finis).

5.1.2 Opérations sur la K–théorie profinie

Les considérations précédentes montrent, jointes à une remarque élémentaire du § 3.3.1, que $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ opère sur le type d'homotopie[131] $(Gr_{ét})_p$. Comme la somme directe des fibrés correspond dans la grassmannienne infinie à la limite inductive filtrante de réalisations topologiques de flèches de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$ (cela se voit aussitôt dans les cartes usuelles), cette action est compatible à la loi de groupe abélien de la K–théorie p-profinie.

Notons $\alpha : Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathbb{Z}}_p^*$ (groupe des éléments inversibles de l'anneau $\widehat{\mathbb{Z}}_p$) le morphisme de groupes obtenu en restreignant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'action du groupe de Galois au groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ des racines p^n-ièmes de l'unité. Des propriétés élémentaires de théorie de Galois montrent que α est *surjectif*.

Proposition 88 *L'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur $(Gr_{ét})_p$ se factorise par α.*

Démonstration : Traitons d'abord le cas complexe. La proposition 45 et la compatibilité de l'action à l'addition des fibrés montrent qu'il suffit d'établir que l'action du groupe de Galois sur $Gr_{ét,1}(\mathbb{C})_p$ se factorise par α. Comme $GL_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^1$ a le type d'homotopie d'un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 1)$, $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \simeq K(\mathbb{Z}, 2)$. Or la flèche canonique $K(\mathbb{Z}, 1) \to \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(K(\mathbb{Z}, 1))$ s'identifie homotopiquement à $K(\mathbb{Z}, 1) \to K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 1)$. En effet, par le corollaire 22, comme $K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 1) \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} K(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, 1)$ (cf. [10], ch. IX, § 3), il suffit de montrer que la tour $(T_n = K(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, 1))_n$ est une complétion de $K(\mathbb{Z}, 1)$ relativement aux types d'homotopie X d'espace $\mathbb{F}_p$-nilpotents pointés connexes dont seul un nombre fini de groupes d'homotopie sont non triviaux. Si X est de type $K(V, m)$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et V est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, il s'agit de vérifier que le morphisme canonique $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} H^m(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\,; V) \to H^m(\mathbb{Z}\,; V)(= V \text{ si } k = 1, 0 \text{ si } k > 1)$ est un isomorphisme, ce qui découle de résultats élémentaires de [40], et le cas général s'en déduit grâce à la proposition 78[132].

Comme on a une fibration principale d'espace total contractile, de base $K(\mathbb{Z}, 2)$ et de fibre $K(\mathbb{Z}, 1)$, on en déduit par la proposition 76 que le morphisme canonique $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))$ s'identifie (homotopiquement) à $K(\mathbb{Z}, 2) \to K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 2)$. Comme $\pi(K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 2), K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 2)) \simeq H^2(K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 2), \widehat{\mathbb{Z}}_p) \simeq \hom_{\mathbf{Grp}}(\widehat{\mathbb{Z}}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p)$ (cf. [44]), il suffit maintenant de voir que l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur $\pi_2(Gr_{ét,1}(\mathbb{C})_p)$ se factorise par α. L'injection $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ s'identifie à l'application canonique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^2$ dans le « deuxième étage » de sa tour de Postnikov, donc elle induit un isomorphisme entre les π_i pour $i \leq 2$ et est surjective entre les π_3, donc par la proposition 5.1 du chapitre IV de [10] il en est de même pour l'application induite $\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$. Vu que celle–ci est compatible aux actions de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ (l'application $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ est la réalisation topologique d'un morphisme de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$), il suffit finalement de voir que

---

130 on vérifie aisément que la projection canonique associée à ce quotient est banale au voisinage de l'élément neutre, ce qui suffit pour montrer que c'est une fibration principale vu qu'il s'agit de groupes de Lie.

131 que par commodité nous assimilerons souvent à un complexe cellulaire le représentant.

132 si en effet on a une fibration pointée $X \to B$ de fibre connexe F du type précédent et que le résultat est connu pour B, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_2 B & \longrightarrow & \pi_1 F & \longrightarrow & \pi_1 X & \longrightarrow & \pi_1 B & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\pi((T_n), \Omega B) & \longrightarrow & \pi((T_n), F) & \longrightarrow & \pi((T_n), X) & \longrightarrow & \pi((T_n), B) & &
\end{array}$$

dans lequel les flèches verticales, sauf peut–être la troisième, sont des isomorphismes, ce qui montre que la dernière flèche horizontale en bas est surjective et permet d'appliquer le lemme des cinq pour conclure.

l'action du groupe de Galois sur $\pi_2(\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}_p \otimes \pi_2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H_2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\,;\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ (utiliser [10], ch. IV § 5 et le théorème de Hurewicz), ou sur les $H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\,;\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq H^2_{ét}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\,;\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ se factorise par α (en effet, tous les isomorphismes utilisés sont canoniques). La suite exacte de Mayer–Vietoris en cohomologie étale (cf. [32]) montre, en utilisant le recouvrement ouvert canonique de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ par deux variétés isomorphes à $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et d'intersection $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}} = Spec\,\mathbb{C}[X, X^{-1}]$ et le théorème de comparaison, qu'on a un isomorphisme $H^2_{ét}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}\,;\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq H^1_{ét}((\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}\,;\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ compatible à l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. L'isomorphisme $H^1_{ét}((\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}\,;\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, qui résulte du théorème de comparaison, peut se voir de manière géométrique : ce groupe de cohomologie s'interprète en termes de revêtements étales galoisiens de groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}$ (cf. [32], ch. III, § 4). Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}$ a un unique (à isomorphisme près) revêtement étale connexe de degré n, à savoir $Spec\,\mathbb{C}[X, X^{-1}][T]/(T^n - X) \to (\mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}[X, X^{-1}][T]/(T^n - X)$ est une $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$-algèbre étale par le critère jacobien ; on n'a pas d'autres revêtements étales vu que leur réalisation topologique est un revêtement analytique fini de $\mathbb{C}^*$) ; le groupe des automorphismes de ce revêtement est canoniquement isomorphe au groupe des racines n-ièmes ξ de l'unité dans $\mathbb{C}^*$ (via l'automorphisme de la $\mathbb{C}[X, X^{-1}]$-algèbre $\mathbb{C}[X, X^{-1}][T]/(T^n - X)$ donné par $T \longmapsto \xi T$), et l'action naturelle de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur ce groupe s'obtient en restreignant l'action de $\alpha \in Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ au groupe des racines n-ièmes ξ de l'unité, ce qui achève la démonstration dans le cas complexe.

Pour le cas réel, on remarque que l'action du groupe de Galois sur la K–théorie p-profinie est compatible à la complexification et la restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$: en effet, ces opérations proviennent, à homotopie près (dans les espaces classifiants décrits au paragraphe précédent), de réalisations topologiques de morphismes de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$ [133]. Ensuite, la proposition 52, combinée à la proposition 87 et au corollaire 3.3 de [10], ch. IX (qui permet de se ramener au cas de complexes finis [134]), montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le morphisme induit par la complexification $\pi(Gr_{ét,n}(\mathbb{R})_p, Gr_{ét}(\mathbb{R})_p) \to \pi(Gr_{ét,n}(\mathbb{R})_p, Gr_{ét}(\mathbb{C})_p)$ est injectif. En passant à la limite inductive sur n (toujours grâce au corollaire 3.3 de [10], ch. IX), cela montre, en utilisant le résultat dans le cas complexe, que l'action de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ sur l'élément universel de $\pi(Gr_{ét}(\mathbb{R})_p, Gr_{ét}(\mathbb{R})_p)$ (i.e la classe de l'identité) se factorise par α, d'où la conclusion.

Cette démonstration, vu que le groupe des automorphismes homotopiques de $K(\widehat{\mathbb{Z}}_p, 2)$ est isomorphe au groupe $\widehat{\mathbb{Z}}^*_p$ des automorphismes du groupe $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, montre même que le groupe des actions naturelles sur la K–théorie [135] p-profinie (réelle comme complexe) compatibles à la complexification et à la restriction des scalaires est exactement $\widehat{\mathbb{Z}}^*_p$. En particulier, les opérations induites par les opérations d'Adams ψ^k, pour k premier à p, sont obtenues par action de l'élément k de $\widehat{\mathbb{Z}}^*_p$, parce qu'au niveau des fibrés en droites complexes, classifiés par $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \simeq K(\mathbb{Z}, 2)$, ψ^k correspond à la multiplication par k dans $\mathbb{Z} \simeq \pi_2(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}))$ [136].

5.2 Fibrations sphériques complétées et localisées

Par la proposition 43, on dispose d'un foncteur $CH : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \to \mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ qui au type d'homotopie d'un complexe cellulaire X associe le type d'homotopie d'un complexe cellulaire connexe $CH(X)$ représentant le foncteur qui a un complexe cellulaire [137] C associe l'ensemble des classes d'homotopie fibrée de fibrations de base C dont les fibres ont pour type d'homotopie X.

Pour un espace X non forcément localement compact, on ne peut pas toujours facilement mettre une topologie naturelle sur l'ensemble des applications continues de X dans X : pour contourner cette difficulté, nous utiliserons le (type d'homotopie de) groupe simplicial $\mathrm{Aut}_h\, X$ des « automorphismes homotopiques simpliciaux » de X, qui est défini comme le sous–espace de l'image $\mathrm{End}_h\, X$ dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}(SX, SX)$ (où SX désigne comme au § 2.1.2 le complexe singulier de X) formé des éléments inversibles pour la composition (lorsque X est localement compact, on peut voir $\mathrm{Aut}_h\, X$ comme le type d'homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie de X dans X muni de la topologie de la convergence compacte).

[133] En effet, la complexification provient de la réalisation topologique complexe des morphismes de schémas évidents $O_{n+k}/(O_n \times O_k) \to GL_{n+k}/(GL_n \times GL_k)$ (l'espace topologique $GL_{n+k}(\mathbb{C})/(GL_n(\mathbb{C}) \times GL_k(\mathbb{C}))$ a le même type d'homotopie que la grassmannienne $Gr_{n,k}(\mathbb{C})$) et la restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ des $U_{n+k}/(U_n \times U_k) \to O_{2n+2k}/(O_{2n} \times O_{2k})$ (où l'on voit U_m comme sous–schéma fermé de GL_{2m}).

[134] [6] montre en effet que le terme $\varprojlim^1$ qui apparaît est trivial pour la grassmannienne infinie.

[135] on se restreint aux actions sur le *groupe* $\widehat{K}_p$, i.e. compatibles à l'addition.

[136] En effet, l'application $x \longmapsto x^k$ induit dans $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ la multiplication par k, et il suffit d'utiliser la fibration $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ de fibre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\setminus\{0\} \arrow[r] \arrow[d, "x\longmapsto x^k"] & \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}\setminus\{0\} \arrow[r] \arrow[d, "x\longmapsto x^{\otimes k}"] & \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C}) \arrow[d, equal] \\
\mathbb{C}\setminus\{0\} \arrow[r] & (\mathbb{C}^{(\mathbb{N})})^{\otimes k}\setminus\{0\} \simeq \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}\setminus\{0\} \arrow[r] & \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

[137] afin de ne pas trop alourdir la rédaction, nous parlons souvent d'espaces au lieu de types d'homotopie d'espaces.

Proposition 89 *Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Ho}(\mathbf{Top})$ et tout $i \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme de groupes naturel*

$$\pi_{i+1}(CH(X)) \simeq \pi_i(\mathrm{Aut}_h X)\,.$$

Démonstration : Soit $p : E \to \mathbb{S}^{i+1}$ une fibration pointée de fibre X. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & E \\ {\scriptstyle j}\big\downarrow & & {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ X \times \mathbb{B}^{i+1} & \xrightarrow{b} & \mathbb{S}^{i+1} \end{array} \tag{18}$$

où a désigne l'inclusion de la fibre, $j(x) = (x, *)$ — $*$ étant un point de base dans la boule unité fermée $\mathbb{B}^{i+1}$ de l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^{i+1}$ choisi dans sa frontière $\mathbb{S}^i$, b la composée $X \times \mathbb{B}^{i+1} \to \mathbb{B}^{i+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{B}^{i+1}/\mathbb{S}^i \simeq \mathbb{S}^{i+1}$ [138]. Comme j est une cofibration triviale, on peut trouver une application continue $r : X \times \mathbb{B}^{i+1} \to E$ telle que $r(x, *) = x$ et $p \circ r(x, u) = \pi(u)$. En particulier la restriction de r à $X \times \mathbb{S}^i$ est à valeurs dans X, elle définit donc une application continue $\alpha : X \times \mathbb{S}^i \to X$ telle que $\alpha(\cdot, *) = id_X$. Utilisant la correspondance homotopique entre ensembles simpliciaux et complexes cellulaires, on constate que le type d'homotopie de α peut se voir comme un élément de $\pi_i(\mathrm{End}_h X)$; celui–ci est en fait dans $\pi_i(\mathrm{Aut}_h X)$: pour $i > 0$ cela découle de la connexité de $\mathbb{S}^i$; pour $i = 0$ un inverse homotopique de $\alpha(\cdot, 1)$ est donné par un relèvement correspondant au diagramme commutatif obtenu à partir de (18) en remplaçant b par la composée $X \times \mathbb{B}^1 \to \mathbb{B}^1 \simeq [0,1] \xrightarrow{t \longmapsto 1-t} [0,1] \simeq \mathbb{B}^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$ et en utilisant l'unicité homotopique des relèvements (proposition 12). Comme $\pi_{i+1}(CH(X))$ s'identifie canoniquement aux classes d'homotopie fibrée de fibrations pointées de base $\mathbb{S}^{i+1}$ et de fibre X, cela fournit un morphisme de groupes naturel $\pi_{i+1}(CH(X)) \to \pi_i(\mathrm{Aut}_h X)$ [139].

Réciproquement, si $\alpha : X \times \mathbb{S}^i \to X$ est une application continue telle que $\alpha(\cdot, *) = id_X$ et que pour tout $s \in \mathbb{S}^i$ $\alpha(\cdot, s)$ soit une équivalence d'homotopie, soit E_α la somme amalgamée de X et $X \times \mathbb{B}^{i+1}$ au–dessus de $X \times \mathbb{S}^i$, les applications $X \times \mathbb{S}^i \to X$ et $X \times \mathbb{S}^i \to X \times \mathbb{B}^{i+1}$ étant α et l'inclusion canonique respectivement. Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{S}^i & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X \times \mathbb{B}^{i+1} & \xrightarrow{b} & \mathbb{S}^{i+1} \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est l'application constante, commute, on en déduit une application continue $p_\alpha : E_\alpha \to \mathbb{S}^{i+1}$, que l'on peut supposer, quitte à remplacer E_α par un espace ayant le même type d'homotopie, être une fibration par l'axiome **(CM5)**(a). Le lemme 2 de [36] montre que le morphisme naturel $X \to E_\alpha$ identifie X à la fibre homotopique de p_α [140] : en effet, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X \times \mathbb{B}^{i+1} & \longleftarrow & X \times \mathbb{S}^i & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbb{B}^{i+1} & \longleftarrow & \mathbb{S}^i & \longrightarrow & * \end{array}$$

(où les flèches verticales sont les projections, les flèches horizontales de gauche les inclusions) le carré de gauche est cartésien, celui de droite l'est à homotopie près car l'hypothèse sur α montre que l'application $X \times \mathbb{S}^i \longrightarrow X \times \mathbb{S}^i \quad (x, s) \longmapsto (\alpha(x, s), s)$ est une équivalence d'homotopie, et $\mathbb{S}^{i+1}$ s'identifie à la limite inductive du diagramme horizontal inférieur. On en déduit aussitôt à l'aide de la proposition 42 que $\alpha \longmapsto p_\alpha$ induit une application naturelle $\pi_i(\mathrm{Aut}_h X) \to \pi_{i+1}(CH(X))$ inverse de la précédente, d'où la proposition.

Nous allons appliquer ce résultat à $CH(\mathbb{S}^{n-1}) = BG_n$ (cas dans lequel nous l'avons déjà énoncé — cf. § 3.1.3), $CH(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$, que nous noterons B_n^p, et $CH(\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{S}^{n-1})$, que nous désignerons par $\widehat{B}_n^p$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et p est un nombre premier. On a un diagramme commutatif (à homotopie près)

$$\begin{array}{ccc} BG_n & \longrightarrow & B_n^p \\ \big\| & & \big\downarrow \\ BG_n & \longrightarrow & \widehat{B}_n^p \end{array} \tag{19}$$

où $BG_n \to \widehat{B}_n^p$ est obtenu au niveau des fibrations sphériques en appliquant le foncteur $\dot{\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}}$ de « complétion fibrée » (cf. § 4.1.3), $BG_n \to B_n^p$ par le foncteur de « localisation fibrée » $\dot{\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}}$ et $B_n^p \to \widehat{B}_n^p$ en utilisant à nouveau $\dot{\mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}}$ — cela

[138]on suppose évidemment que dans cette identification l'image de $\mathbb{S}^i$ est le point de base choisi dans $\mathbb{S}^{i+1}$.

[139]On vérifie en effet aussitôt que l'élément de $\pi_i(\mathrm{Aut}_h X)$ trouvé ne dépend que de la classe d'homotopie fibrée de p et que l'application exhibée est un morphisme de groupes.

[140]i.e. identifie (homotopiquement) X à la fibre de la fibration obtenue en remplaçant p_α par une fibration via **(CM4)** (laquelle est unique à homotopie près).

donne bien le résultat annoncé grâce à la proposition 69, (16) (les sphères sont des espaces nilpotents) et la proposition 42 assurant la commutativité du diagramme.

Proposition 90 *1. Pour $n \geq 3$, le diagramme de groupes fondamentaux correspondant à* (19) *est*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p^* \\ \| & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}_p^* \end{array}$$

2. Le diagramme de revêtements universels correspondant à (19) *est naturellement isomorphe à*

$$\begin{array}{ccc} BSG_n & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} BSG_n \\ \| & & \downarrow \\ BSG_n & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p} BSG_n \end{array}$$

Démonstration : Nous nous bornerons à établir les résultats concernant l'application naturelle $BG_n \to B_n^p$, le reste se prouvant de façon analogue (en utilisant (16) pour ce qui a trait à la flèche $B_n^p \to \widehat{B}_n^p$).

Par le corollaire 24 [141], le morphisme canonique $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}$ identifie $\operatorname{End}_h \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}$ à l'image dans $\mathbf{Ho}(\mathbf{S})$ de $\mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$ [142]. Comme dans la démonstration de la proposition 44, on a une fibration pointée $\mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}) \to \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}$ de fibre $\mathbf{Hom}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$ (sous–espace formé des morphismes pointés), d'où en particulier $\pi_0(\mathbf{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})) \simeq \pi_0(\mathbf{Hom}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})) \simeq \pi_{n-1}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$ canoniquement (comme $n \geq 3$, $\pi_0(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$ et $\pi_1(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$ sont comme $\pi_0\,\mathbb{S}^{n-1}$ et $\pi_1\,\mathbb{S}^{n-1}$ triviaux).

Comme les groupes d'homotopie de degré strictement inférieur à $n-1$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}$ sont triviaux (par la proposition 73), cela entraîne $\pi_0(\operatorname{End}_h \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_{n-1}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}\,;\,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p \otimes H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}\,;\,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p$ par le théorème de Hurewicz et la proposition 84. Dans cette identification, la loi sur $\pi_0(\operatorname{End}_h \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$ induite par la composition correspond à la loi multiplicative de $\mathbb{Z}_p$ [143], d'où par la proposition précédente $\pi_1(CH(B_n^p)) \simeq \pi_0(\operatorname{Aut}_h \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}_p^*$, et la naturalité des isomorphismes montre que l'application induite par $BG_n \to B_n^p$ entre les groupes fondamentaux est bien l'inclusion naturelle $\mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}_p^*$.

Comme $\pi_i(\mathbf{Hom}_*(\mathbb{S}^k, E)) \simeq \pi_{i+k}(E)$ canoniquement pour tous n, $k \in \mathbb{N}$ et tout espace E, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Hom}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Hom}_*(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}(\mathbb{S}^{n-1}, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1} \end{array}$$

la suite exacte longue d'homotopie de ces fibrations et le lemme des cinq montrent, combinés à la proposition précédente (qui donne $\pi_i(CH(X)) \simeq \pi_{i-1}(\operatorname{End}_h X)$ pour $i > 1$, par connexité de $\mathbb{S}^{i-1}$) et la proposition 84, que l'application induite par $BG_n \to B_n^p$ au niveau des revêtements universels s'identifie à $BSG_n \to \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}(BSG_n)$, d'où la conclusion.

Comme dans le cas de BG_n, on définit $B_\infty^p = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}^*} B_n^p$ et $\widehat{B}_\infty^p = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}^*} \widehat{B}_n^p$, les applications $B_n^p \to B_{n+1}^p$ et $\widehat{B}_n^p \to \widehat{B}_{n+1}^p$ étant induites par la suspension fibrée [144] au niveau des fibrations sphériques localisées ou complétées (en effet, la suspension de $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^n$ comme on le voit aussitôt grâce à la proposition 84, et on a un résultat analogue dans le cas complété — cf. [10], ch. VI, proposition 6.6). Le diagramme (19) fournit par passage à la limite inductive un diagramme commutatif (à homotopie près)

$$\begin{array}{ccc} BG_\infty & \longrightarrow & B_\infty^p \\ \| & & \downarrow \\ BG_\infty & \longrightarrow & \widehat{B}_\infty^p \end{array} \tag{20}$$

[141] dans le cas analogue du morphisme $BG_n \to \widehat{B}_n^p$, il faut utiliser quelques résultats de [10] (ch. VI) sur la p-complétion des espaces nilpotents (en particulier le fait qu'un tel espace est $\mathbb{F}_p$-bon) pour pouvoir raisonner de même.

[142] on assimile ici les types d'homotopie topologiques et simpliciaux pour alléger les notations.

[143] en effet cela montre que le morphisme canonique $\pi_0(\operatorname{End}_h \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}) \to \hom_{\mathbf{Grp}}(H_{n-1}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}\,;\,\mathbb{Z}), H_{n-1}(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1}\,;\,\mathbb{Z})) \simeq \hom_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$ est un isomorphisme, et il est clair que la loi induite par la composition sur $\pi_0(\operatorname{End}_h \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{S}^{n-1})$ correspond à la composition dans $\hom_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$, i.e. à la multiplication dans $\mathbb{Z}_p$.

[144] Si $p : E \to X$ est une fibration de Hurewicz, on définit sa suspension fibrée comme l'application évidente vers X du quotient de $E \times [0,1]$ par la relation d'équivalence identifiant (x,t) à (y,t) lorsque $t \in \{0,1\}$ et $p(x) = p(y)$ (on vérifie aussitôt que c'est une fibration de Hurewicz).

Corollaire 28 *1. Le diagramme de groupes fondamentaux correspondant à* (20) *est*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p^* \\ \| & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}}_p^* \end{array}$$

2. Le diagramme de revêtements universels correspondant à (20) *est naturellement isomorphe à*

$$\begin{array}{ccc} BSG_\infty & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} BSG_\infty \\ \| & & \simeq\downarrow \\ BSG_\infty & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p} BSG_\infty \end{array}$$

Démonstration : Comme on peut intervertir les limites inductives en jeu et π_1 (cf. note 47) ou les foncteurs $\mathcal{C}$ qui interviennent (cf. note 128) et que les flèches de la proposition précédente sont compatibles aux opérations de suspension fibrée, le seul point à établir est que la flèche natuelle $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p} BSG_\infty \to \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p} BSG_\infty$ est un isomorphisme, ce qui découle de la finitude des groupes d'homotopie de BSG_∞ (cf. § 3.1.3) et des remarques de la fin du paragraphe 4.5.2 (BSG_∞ est simplement connexe, donc nilpotent).

En combinant ce résultat au corollaire 25, on obtient :

Corollaire 29 *Pour tout espace X, l'application naturelle $\pi(X, BG_\infty) \to \pi(X, \prod_p \widehat{B}^p_\infty)$, où le produit est pris sur tous les nombres premiers p, est injective.*

5.3 La conjecture d'Adams

On pose, pour tout complexe cellulaire fini X, $\widehat{K}(X) = \prod_p \widehat{K}_p(X)$, p parcourant l'ensemble des nombres premiers (le corps de base $\mathbb{K}$ étant indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : pour X connexe on a un isomorphisme naturel $\widehat{K}(X) \simeq \pi(X, Gr_{ét})$, où $Gr_{ét} = \prod_p (Gr_{ét})_p$. $J : Gr_\infty \to BG_\infty$ se factorise (à homotopie près) de manière unique par le morphisme canonique $Gr_\infty \to Gr_{ét}$ vu que $BG_\infty \simeq \prod_p \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p} BG_\infty$ (BG_∞ est nilpotent [145] et ses groupes d'homotopie sont finis) ; on parlera comme dans le cas non profini du type d'homotopie fibrée sphérique stable d'un élément de $\widehat{K}(X)$ pour désigner son image dans $\pi(X, BG_\infty)$.

Par 5.1.2, les $\widehat{K}(X)$ (pour X complexe cellulaire connexe fini) sont munis d'une action naturelle du groupe $\widehat{\mathbb{Z}}^* = \prod_p \widehat{\mathbb{Z}}_p^*$ (si l'on voit $\sigma \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ comme un automorphisme homotopique de $Gr_{ét}$, l'action de σ est donnée par σ^*).

Le théorème qui suit est la forme « abstraite » de la conjecture d'Adams prouvée par Sullivan.

Proposition 91 *Pour tout complexe cellulaire connexe fini X, le type d'homotopie fibrée sphérique stable des éléments de $\widehat{K}(X)$ est constant le long des orbites de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ (en K–théorie réelle comme complexe).*

Démonstration : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ξ_n le fibré vectoriel de rang n tautologique sur Gr_n et γ_n le fibré sphérique associé : son espace total est $E_n = \{(x, v) \in Gr_n \times \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \backslash \{0\} \mid v \in x\}$; $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \backslash \{0\}$ étant contractile, l'application continue $E_n \longrightarrow Gr_{n-1} \quad (x, v) \longmapsto x \cap v^\perp$ [146] est une équivalence d'homotopie. En appliquant le foncteur $\prod_p \mathcal{C}_{\mathbb{F}_p}$ à γ_n, on obtient donc à homotopie près une fibration $\widehat{\gamma}_n : Gr_{ét,n-1} \to Gr_{ét,n}$. Pour $\sigma \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$, considérons le diagramme commutatif (à homotopie près)

$$\begin{array}{ccccc} \sigma^* Gr_{ét,n-1} & \longrightarrow & Gr_{ét,n-1} & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & Gr_{ét,n-1} \\ \sigma^*\widehat{\gamma}_n \downarrow & & \widehat{\gamma}_n \downarrow & & \widehat{\gamma}_n \downarrow \\ Gr_{ét,n} & \xrightarrow{\sigma} & Gr_{ét,n} & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & Gr_{ét,n} \end{array}$$

(la commutation du carré de droite provient de la naturalité de l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$, vu que γ_n est homotopiquement équivalent à l'inclusion $Gr_{n-1} \to Gr_n$, et provient donc de morphismes de $\mathbf{Var}_{\mathbb{C},\mathbb{Q}}$).

La composée $\sigma^* Gr_{ét,n-1} \to Gr_{ét,n-1} \xrightarrow{\sigma^{-1}} Gr_{ét,n-1}$ induit une équivalence d'homotopie entre les fibres, donc par la proposition 42 $\sigma^*\widehat{\gamma}_n$ et $\widehat{\gamma}_n$ ont le même type d'homotopie fibrée. Maintenant le corollaire 29 montre que $\sigma^*\widehat{\xi}_n$ et $\widehat{\xi}_n$

[145] cela résulte de ce que c'est un H-espace ; on peut le voir directement en remarquant que l'involution déterminée par l'action de son groupe fondamental sur ses groupes d'homotopie (assimilés aux classes d'homotopie fibrée de fibrations sphériques stables de base une sphère) est triviale vu qu'au niveau instable elle le devient en prenant la suspension fibrée.

[146] On munit ici $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ (resp. $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$) de sa structure hermitienne (resp. euclidienne) canonique.

(fibrés vectoriels profinis associés à $\sigma^*\xi_n$ et ξ_n respectivement) ont le même type d'homotopie fibrée sphérique stable, ce qui, comme tout élément de $\widehat{K}(X)$ est combinaison linéaire d'images inverses des $\widehat{\xi}_n$, achève la démonstration par naturalité de l'action de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$.

Ce résultat général entraîne aussitôt la conjecture d'Adams sous sa forme originelle :

Corollaire 30 *Soit X est un complexe cellulaire fini. Pour tous $\xi \in K(X)$ et $k \in \mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k^n(\psi^k\xi - \xi)$ ait un type d'homotopie fibrée sphérique stable trivial.*

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où X est connexe, et l'on peut utiliser la K–théorie réduite vu que le morphisme $K(X) \to \pi(X, BG_\infty)$ se factorise par $K(X) \to \widetilde{K}(X)$. On utilise alors l'élément σ_k de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ dont la composante dans $\widehat{\mathbb{Z}}_p^*$ est k lorsque le nombre premier p ne le divise pas, 1 sinon. Soit α l'image de ξ dans $\widehat{K}(X)$: $\sigma_k^*\alpha$ a la même image dans $\widehat{K}_p(X)$ que l'image β de $\psi^k\alpha$ dans $\widehat{K}(X)$ pour p premier à k (d'après la description des opérations d'Adams en termes de K–théorie profinie donnée au § 5.1.2), donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{K}(X) & \longrightarrow & \pi(X, BG_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{p \nmid k} \widehat{K}_p(X) & \longrightarrow & \pi(X, \mathcal{C}_{\mathbb{Z}[k^{-1}]} BG_\infty) \end{array}$$

la proposition 86 et le corollaire 27 montrent que l'image de $\sigma_k^*\alpha - \beta$ dans $\pi(X, BG_\infty) \otimes \mathbb{Z}[k^{-1}]$ est nulle, donc pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, le type d'homotopie fibrée sphérique stable de $k^n(\sigma_k^*\alpha - \beta)$, donc de $k^n(\beta - \alpha)$ par la proposition précédente, i.e. de $k^n(\psi^k\xi - \xi)$, est trivial, ce qu'il fallait démontrer.

Références

[1] J.F. Adams, *Infinite loop spaces*, Annals of math. studies, **90**, Princeton university press and university of Tokyo press, 1978.

[2] J.F. Adams, *Vector fields on spheres*, Annals of mathematics, second series, **75**, 1962, p. 603-632.

[3] M. Artin, *Cohomologie étale des schémas XI : comparaison avec la cohomologie classique : cas d'un préschéma lisse* (SGA 4), Séminaire de géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964.

[4] M. Artin, *On the joins of Hensel rings*, Advances in math. **7**, 1972, p. 282-296.

[5] M. Artin et B. Mazur, *Étale homotopy*, Lecture notes in math. **100**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[6] M.F. Atiyah et G.B. Segal, *Equivariant K-theory and completion*, Journal of differential geometry **3**, 1969, p. 1-18.

[7] R. Bott, *Lectures on K(X)*, W.A. Benjamin, New-York Amsterdam, 1969.

[8] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitres 1 à 4*, Masson, Paris, 1985.

[9] N. Bourbaki, *Topologie générale, chapitres 5 à 10*, diffusion C.C.L.S., Paris, 1974.

[10] A.K. Bousfield et D.M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture notes in math. **304**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[11] E.H. Brown, *Cohomology theories*, Annals of mathematics, second series, **75**, 1962, p. 467-484.

[12] E. Curtis, *Lower central series of semi-simplicial complexes*, Topology **2**, 1963, p. 159-171.

[13] P. Deligne, *Cohomologie étale* (SGA $4\frac{1}{2}$), Lecture notes in math. **569**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[14] A. Dold, *Halbexakte Homotopiefunktoren*, Lecture notes in math. **12**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[15] A. Dold, *Über fasernweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen*, Math. Zeitschrift **62**, 1955, p. 111-136.

[16] A. Dold et R. Lashof, *Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles*, Illinois journ. of math. **3**, 1959, p. 285-305.

[17] R. et A. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, Cedic, Paris, 1977.

[18] S. Eilenberg et S. MacLane, *Relations between homology and homotopy groups of spaces II*, Annals of mathematics, second series, **51**, 1950, p. 514-533.

[19] E.M. Friedlander, *Fibrations in the étale homotopy theory*, Publ. math. de l'I.H.E.S., **42**, 1973, p.5-46.

[20] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

[21] P.G. Goerss et J.F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in math. **174**, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-London, 1999.

[22] M. Grauert et R. Remmert, *Komplexe Räume*, Math. Annalen, **136**, 1958, p. 245-318.

[23] A. Grothendieck, *Morphismes étales* et *Morphismes simples (généralités, propriétés différentielles)* (SGA 1) , Séminaire de géométrie algébrique de l'I.H.E.S. (exposés I et II), 1960.

[24] G. Hochschild et J-P. Serre, *Cohomology of group extensions*, trans. amer. math. soc., **74**, 1953, p. 110-143.

[25] D. Husemoller, *Fibre bundles* (3ème édition), Graduate texts in math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.

[26] J.F. Jardine, *Simplicial objects in a Grothendieck topos*, Comtemporary math. **55** (I), 1986, p. 193-239.

[27] M. Karoubi, *K-théorie*, les presses de l'université de Montréal, 1971.

[28] M. Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie*, Ann. scient. Ecole Norm. Sup., **71**, 1954, p. 101-190.

[29] S. Lubkin, *On a conjecture of André Weil*, Amer. journal of math. **89**, 1967, p. 443-548.

[30] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Graduate texts in math., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[31] J.P. May, *Classifying spaces and fibrations*, Memoirs of the amer. math. soc., **155**, 1975.

[32] J.S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton university press, 1980.

[33] F. Morel, *Ensembles profinis simpliciaux et interprétation géométrique du foncteur T*, bull. soc. math. France **124**, 1996, p. 347-373.

[34] F. Morel, *Quelques remarques sur la cohomologie modulo p continue des pro-p-espaces et les résultats de J. Lannes concernant les espaces fonctionnels hom(BV,X)*, Ann. scient. Ecole Norm. Sup., **26**, 1993, p. 309-360.

[35] F. Morel et V. Voevodsky, *A^1-homotopy theory of schemes*, Publ. math. de l'I.H.E.S. **90**, 1999, p. 45-143.

[36] V. Puppe, *A remark on "homotopy fibrations"*, Manuscripta math. **12**, 1974, p. 113-120.

[37] D.G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture notes in math. **43**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[38] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*, Lecture notes in math. **169**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[39] S. Saks et A. Zygmund, *Fonctions analytiques*, Masson, Paris, 1970.

[40] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture notes in math. **5**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[41] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'institut Fourier, **VI**, 1955-1956, p. 1-42.

[42] J.-P. Serre, *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*, Annals of mathematics, second series, **58**, 1953, p. 258-294.

[43] J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Annals of mathematics, second series, **54**, 1951, p. 425-505.

[44] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[45] J. Stasheff, *H-spaces from a homotopy point of view*, Lecture notes in math. **161**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[46] D. Sullivan, *Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture*, Annals of mathematics, second series, **100**, 1974.

[47] J.-L. Verdier, *Cohomologie étale des schémas I à IV : topologie et faisceaux* et *V : cohomologie dans les topos* (SGA 4), Séminaire de géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964.