Théorie homotopique des schémas d'Atiyah et Hitchin

Ce travail introduit la notion de schéma d'Atiyah et Hitchin. Une variété algébrique raisonnable Y étant fixée, il s'agit d'une famille de nouveaux schémas, indexée par un entier positif m et notée $\mathcal{R}_m Y$. Nous étudions les propriétés homotopiques de ces « espaces » au sens de Morel et Voevodsky.

Les schémas $\mathcal{F}_m$ des fractions rationnelles pointées de degré m constituent un exemple fondateur et fondamental. Du point de vue topologique, les travaux de G. Segal et F. Cohen *et al.* montrent que l'espace $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ approxime l'espace de lacets $\Omega^2 \mathrm{S}^3$. Nous formulons une série précise de conjectures visant à généraliser ces résultats dans un cadre algébrique. Le schéma $\mathcal{R}_m Y$ approximerait l'espace de lacets *motivique* $\Omega^{\mathbf{P}^1}\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{P}^1} Y$. Nous obtenons plusieurs résultats dans cette direction. En particulier :

- Nous déterminons l'ensemble des composantes connexes algébriques *naïves* du schéma de fractions rationnelles $\mathcal{F}_m$, au-dessus d'un corps de base. Le calcul est simple et élémentaire. On retrouve, à une complétion près, le groupe des classes d'homotopie d'endomorphismes pointés de la droite projective $\mathbf{P}^1$, tel que calculé par Morel.
- Nous construisons un morphisme *algébrique* reliant $\mathcal{R}_m Y$ à $\Omega^{\mathbf{P}^1}\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{P}^1} Y$.
- Lorsque Y est une variété algébrique complexe, nous explicitons le type d'homotopie de l'espace topologique $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ comme un foncteur en $Y(\mathbf{C})$. De plus, nous montrons que l'espace $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ admet un scindement stable dont les facteurs sont ceux du scindement de Snaith de l'espace $\Omega^2\mathbf{\Sigma}^2 Y(\mathbf{C})$.

Mots clés : Schémas d'Atiyah et Hitchin, homotopie motivique, fractions rationnelles, espaces de lacets, espaces de configuration.

Homotopy theory of Atiyah and Hitchin schemes

This work introduces Atiyah-Hitchin schemes. They are a family, indexed by a positive integer m, of algebraic varieties $\mathcal{R}_m Y$ attached to a fixed algebraic variety Y. We study the motivic homotopy properties of these "spaces" in the sense of Morel and Voevodsky.

The schemes $\mathcal{F}_m$ of pointed rational functions of degree m form a fundamental example. From the topological viewpoint, Segal and F. Cohen *et al.* proved that the topological space $\mathcal{F}_m(\mathbf{C})$ approximates the loop space $\Omega^2 \mathrm{S}^3$. We formulate a precise series of conjectures aiming to generalize these results to the algebraic framework. The slogan is that the scheme $\mathcal{R}_m Y$ should approximate the motivic loop space $\Omega^{\mathbf{P}^1}\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{P}^1} Y$. We establish several results in this direction, among which:

- First, we determine the monoid of naive algebraic connected components of the schemes of rational functions $\mathcal{F}_m$ over a base field. The method is simple and elementary. We recover, up to a completion, the group of motivic homotopy classes of endomorphisms of the projective line $\mathbf{P}^1$, as computed by Morel.
- We construct an *algebraic* morphism linking $\mathcal{R}_m Y$ to $\Omega^{\mathbf{P}^1}\mathbf{\Sigma}^{\mathbf{P}^1} Y$.
- When the algebraic variety Y is defined over $\mathbf{C}$, we give an explicit description of the homotopy type of the topological space $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ as a functor in $Y(\mathbf{C})$. Moreover, we show that the space $(\mathcal{R}_m Y)(\mathbf{C})$ stably splits with the same summands as in the Snaith splitting of $\Omega^2\mathbf{\Sigma}^2 Y(\mathbf{C})$.

Keywords: Atiyah and Hitchin schemes, motivic homotopy theory, rational functions, loop spaces, configuration spaces.

Mathématiques

Laboratoire d'analyse, géométrie et applications
99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse.