Des outils en géométrie affine euclidienne

en cours de rédaction

Réalisé dans le cadre du Campus numérique EscaleS:
www.u-escales.org

avec le soutien de l'UFR Sciences de l'UNSA

B. Rousselet *

en cours de rédaction septembre 2004

Table des matières

*Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice, Cédex 2, email : br@math.unice.fr FAX 04 93 51 79 74

1 Fiche de description

Preparation visée : Capes externe de mathématiques ; remise à niveau pour l' agrégation interne ou externe.
Auteur : B ; Rousselet — **Contact :** Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice, Cédex 2, email : br@math.unice.fr FAX 04 93 51 79 74
Nom d' archive :
format du document : .dvi, .ps, .pdf
Date de création : septembre 2004
Unités de cours dans laquelle la ressource s'intègre :
Matière : Mathématiques.
Titre : Des outils en gomtrie affine euclidienne
Contenu : Cours et exercices pour l'écrit et l'oral . Peut être utilisé avec des exercices WIMS décrits par ailleurs.
Objectifs de la ressource et niveau : Considère le niveau de la Terminale et donc de l'oral jusqu'au niveau de l'écrit du CAPES.
Volume d'heures apprentissage apprenant : 20h
Nature de la ressource : texte navigable.
Programme : une partie du paragraphe 2-IV-2 et 2-V-3 du programme complémentaire du CAPES externe de mathématiques (noter que le 2-V-3 est au programme de l'oral) et Terminale S
Commentaire libre : Peut être utilisé avec des exercices WIMS décrits par ailleurs ; l'utilisation des exerices WIMS est indispensable en cas de formation à distance.
bibliographie : [5, 4, 6, 3], [2, 8, 7, 1]
Contexte d'utilisation : **Modalités d'utilisation :** présentiel enrichi ou à distance accompagné **Si tutorat, nombre d'heures :** 10h
Réalisation : **expérience et savoir faire des auteurs :** Plusieurs années d'expérience pour la préparation au CAPES externe ; grande expérience de l'enseigement en analyse numérique, optimisation, mécanique des milieux continus, analyse de données ; recherches en optimisation de systèmes régis par équations aux dérivées partielles issus de la mécanique des milieux continus. **Indication des formats des fichiers finaux :** .dvi, .ps, .pdf, .html ; Tous ces fichiers sont engendrés à partir de fichiers latex avec le paquetage Hyperreff : ils contiennent des liens hypertextes dans toutes leurs versions. **Organisation de la production :** La ressource peut être utilisée dès maintenant mais des détails techniques sont en suspent faute de support technique(ex. : insertions de figures pour certains formats ; tests des fichiers avec diverses versions des navigateurs...).
Valeur d'échange de la ressource : correspond à 20 h d'équivalent TD
Coût de la ressource : 50h d' équivalent TD

2 Introduction

2.1 Références à utiliser

1. Pour une initiation on pourra consulter dans
   le site de l'Université en ligne, (http ://www.uel-pcsm.education.fr) citeuel
   le chapitre introduction géométrique de l'algébre linéaire.
2. Dans le campus EscaleS, on consultera aussi les documents de A. Cherif et de M.C. David pour les notions fondamentales de géométrie affine ; consulter aussi le polycopié de N. Mestrano sur les espaces vectoriels euclidiens (i.e. munis d' un produit scalaire).
3. Enfin travailler dans les documents de WIMS ([8, 7] : "Comment construire des sous espaces vectoriels" de B. Perrin-Riou et M. Deschamps A noter aussi un site de documents pour le senseignants du secondaire : [1].

2.2 Guide d' activité

Le **but** de ce chapitre est de rappeler et manipuler les différents types d' équations pour représenter des sous espaces affines et les utiliser pour déterminer des projections orthogonales. Ce point de vue géométrique pourra permettre de comprendre des méthodes trés utilisées en pratique comme *la méthode des moindres carrés ou l'analyse en composantes principales.*

2.2.1 Prérequis

1. Notions géométriques de T.S : droites du plan ou de l' espace affine ; droites et plans de l'espace affine ; barycentres ; produits scalaires.
2. Espaces vectoriels : sous-espaces vectoriels, bases ; applications linéaires, matrices ; produit scalaire.
3. On considère une espace affine $\mathbf{E}$ de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. A tout couple de points A et B de l'espace affine $\mathbf{E}$, on peut associer un vecteur unique $\vec{u}$ de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
4. Si l'on fixe un point O, on peut associer à tout point A, un vecteur unique $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et réciproquement ; en d' autres termes, on peut identifier un espace affine muni d'un point origine et un espace vectoriel. *Intuitivement on peut dire que si l'on oublie l'origine dn espace vectoriel, il reste un espace affine*
5. **Représentation graphique** : en *algèbre linéaire,* vous avez dû prendre l'habitude de représenter les vecteurs partant tous de la même origine. L'espace dans lequel nous vivons est affine : on ne peut pas dessiner de vecteurs mais des couples de points auxquels on peut associer des vecteurs selon la formule ci-dessus. Si l'on se place dans un espace vectoriel, on peut associer à 2 vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{q}$, un vecteur $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$; on notera aussi ce vecteur $\overrightarrow{pq}$.
6. **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
   $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$

   Remarque 1 *En particulier $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$ est un vecteur indépendant du point O !*

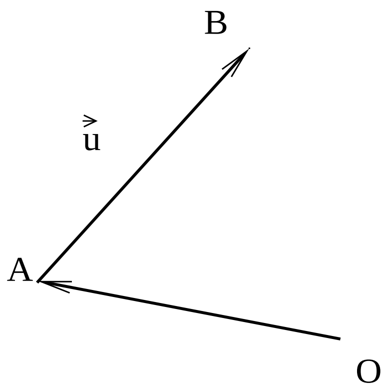

FIG. 1 – vecteur

Exercice 1 ***Dessin (triangle et parallélogramme) de somme et soustraction de vecteurs***
Un exemple avec des donnés numériques et dessin.

7. Quand on considère un sous espace affine $\mathbf{F}$ d'un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{E}}$: la différence de deux vecteurs de ce sous espace affine est dans un sous espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.
   Dans un un sous espace affine $\mathbf{F}$ d'un espace affine $\mathbf{E}$: pour deux points a et m de ce sous espace, le vecteur $\overrightarrow{am}$ est dans un sous espace vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.
   Dans les 2 cas on a une caractérisation d'un sous espace affine à l'aide d' un point $a \in \mathbf{F}$ fixé :
   $$m \in \mathbf{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{am} \in \overrightarrow{\mathbf{F}} \qquad (1)$$

   Remarque 2 *Conformément à la remarque 1, cette définition de sous espace affine est bien indépendante de la positon du point a choisi !*

   Exercice 2 *Justifier la remarque précédente*

8. Espace affine **euclidien** : l'espace vectoriel associé est euclidien, c' est à dire muni d'un produit scalaire. Dans un tel espace affine, on dispose de notions de distance et d'angle par suite l'orthogonalité et les repères orthonormés sont définis !

Dans toute la suite quand on parle d'orthogonalité, on suppose que l'espace est euclidien.

Remarque 3 *Les équations posées sont le plus souvent écrites vectoriellement sans utiliser de repre. Ceci est très utile dans le plan mais devient presque indispensable à partir de la dimenson 3.*

2.3 classe WIMS

Dans la classe WIMS capes-br, vous trouvez des exercices en rapport avec ce chapitre :
http ://wims.unice.fr/wims/wims.cgi ?user=,6781294

3 Programme complémentaire du CAPES

Le présent document corespond à une partie des 2 paragraphes ci-dessous.

Paragraphe :2.IV.1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual. Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale. Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal $O(E)$, groupe des rotations (ou spécial orthogonal) $SO(E)$. Matrices orthogonales. Groupes $O(n)$ et $SO(n)$. Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.
Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.
Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orthonormale directe.

Paragraphe : 2.V.3.Transformations (expo)

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.
Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exempl

4 Droite du plan

On se place dans un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 2. Quand on parle de vecteur **normal**, le plan est supposé **euclidien**. Les rappels et exercices ont pour but de réviser mais surtout d'utiliser des méthodes qui passent en plus grande dimension.

Dans tout ce paragraphe, O est un point fixé choisi comme origine dans le plan affine.

1. **Droite du plan :** , Vecteur directeur et vecteur normal d'une droite vectorielle et affine du plan.

	vecteur directeur	vect. dir. unitaire	vect.norm.	vect. normal unitaire
droite vectorielle D_0	$b \in D_0,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{ob}$	$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{u}}{\lVert\overrightarrow{u}\rVert}$	$\vec{v}\,.\,\tau = 0$	$\nu = \frac{\vec{v}}{\lVert\vec{v}\rVert}$
droite affine D_a	$a, b \in D_a,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$	"	"	"

2. **Équation paramétrique ou cartésienne (implicite) :**

   (a) *avec 1 point et 1 vecteur directeur*

$$m(\lambda) = a + \lambda\overrightarrow{\tau} \tag{2}$$

$$\text{ou avec 2 points : } m(\lambda) = a + \lambda(\overrightarrow{ab}) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

   (b) *équation cartésienne (1 point et 1 vecteur normal).*

$$(\overrightarrow{am}).\overrightarrow{\nu} = 0 \tag{5}$$

	eq. paramétrique	eq. cartésienne (implicite)
dte vect D_0	$\overrightarrow{om} = \lambda\vec{u}$	$\overrightarrow{om}.\vec{\nu} = 0$
dte affineD_a	$m = a + \lambda\vec{u}$	$\overrightarrow{am}\,.\,\vec{\nu} = 0$

   (c) *Avec un repère cartésien,* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et le vecteur directeur :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha 2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

   l' équation paramétrique fournit 2 équations :

$$\tag{7}$$

$$x = \alpha_1 + \lambda(\beta_1 - \alpha_1) \tag{8}$$

$$y = \alpha_2 + \lambda(\beta_2 - \alpha_2) \tag{9}$$

$$\text{en particulier avec} \tag{10}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$x = \lambda \tag{12}$$

$$y = b_2 + \lambda u_2 \textit{ ou l'équation bien connue } y = u_2 x + b_2 \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

   (d) *Avec un repère orthonormé* , 1 équation cartésienne (implicite)

$$(x - a_1)v_1 + (y - a_2)v_2 = 0 \quad \text{ou} \tag{15}$$

$$v_2 y + v_1 x = v_2 a_2 + v_1 a_1 \tag{16}$$

Exercice 3 *(a) Ecriture avec un repère orthonormé.*
(b) Exemples avec des donnés numériques et dessin.

Exercice 4 *(a) Rappeler l' équation barycentrique d' une droite*

(b) Rappeler comment passer d'une représentation paramétrique à un représentation barycentrique.

Exercice 5 *Sujet* interdisciplinaire : *Barycentre et moment d'un système de forces en mécanique.*

3. **Droites // ; droites orthogonales (pour représentation paramétrique ou cartésienne)**. Utiliser des vecteurs directeurs ou normaux suivant les cas.

   Exercice 6 *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*

4. **Projection orthogonale d'un point b sur une droite vectorielle D_0 et affine D_a (équation paramétrique décrite avec 1 vecteur directeur).**
   Rappel : la projection orthogonale de b est caractérisée par :

   $(\vec{b} - \tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b}) . \overrightarrow{\tau} = 0$ et $\tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} \in D_a$ cette appartenance qui peut se traduire par :
   $(\tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} - a) . \overrightarrow{\nu} = 0$ ou bien $\tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} = a + \lambda\vec{u}$.
   Dans le cas où $\overrightarrow{\tau}^2 = 1$ on a :

$$P_{D_0}\overrightarrow{b} = (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{\tau})\overrightarrow{\tau} \tag{17}$$

$$\tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \left[(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}).\overrightarrow{\tau}\right]\overrightarrow{\tau} \tag{18}$$

$$\tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + P_{D_0}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \tag{19}$$

$$\tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} - P_{D_0}\overrightarrow{a} + P_{D_0}\overrightarrow{b} \quad \text{on utilise parfois un vecteur pivot :} \tag{20}$$

$$p = \overrightarrow{a} - P_{D_0}\overrightarrow{a} \quad \text{alors} \quad \tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} = p + P_{D_0}\overrightarrow{b} \tag{21}$$

   pour le cas affine : 2 interprétations avec dessin.

   Exercice 7 – *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*
   - *Projection orthogonale sur une droite // à un axe.*
   - *Généraliser au cas où l'on dispose de vecteur directeur(ou normal) non unitaire.*
   - *Projection sur une droite d'un nuage de points du plan ; exemple avec 2 droites bien placées.*
   - *Retrouver la formule de distance d'un point à une droite.*

   Remarque 4 *Projection sur $D_{a^\perp}$: $\tilde{P}_{D_a^\perp}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + \tilde{P}_{D_O^\perp}(\overrightarrow{b} - \vec{a})$: et l'on a : $b - a = \tilde{P}_{D_a}\overrightarrow{b} - a + \tilde{P}_{D_a^\perp}\overrightarrow{b} - a$ Cette dernière formule n'est autre que celle de la décomposition d'un vecteur selon deux axes orthogonaux !*

5. **Vecteur orthogonal à un vecteur donné par projection** Pour calculer un vecteur orthogonal à un vecteur unitaire τ : Calculer pour un vecteur w, sa projection orthogonale sur la droite vectorielle de vecteur directeur τ : $P_{\vec{\tau}}\vec{w} = (\vec{w}.\vec{\tau})\vec{w}$; si $w \neq P_{\vec{\tau}}\vec{w}$, un vecteur orthogonal : $\vec{\nu} = \frac{w - P_{\vec{\tau}}w}{\|w - P_{\vec{\tau}}w\|}$

Exercice 8 *Autres méthodes pour vecteur orthogonal : ex : rotation ; $\nu.\tau = 0$*

Exercice 9 $\boxed{\textit{Faire la feuille “droites du plan”}}$ *de la classe capes-br sur wims.*

5 Plan et droite dans l'espace tridimensionnel

On se place dans un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 3. Quand on parle de vecteur **normal**, l'espace est supposé **euclidien**. Les rappels et exercices ont pour but de réviser mais surtout d'utiliser des méthodes qui passent en plus grande dimension.

Dans tout ce paragraphe, O est un point fixé choisi comme origine dans l'espace affine.

5.1 Plan dans l'espace

1. **Plan dans l'espace :**vecteurs directeurs et normal.

	vecteurs directeurs	vect.normal	v. norm. unitaire
plan vectoriel $\mathcal{P}_0$	$b_1, b_2 \in \mathcal{P}_0,\ \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{ob_i},\ i = 1, 2$	$\vec{v} \,.\, \vec{u}_i = 0,\ i = 1, 2$	$\nu = \frac{\vec{v}}{\Vert\vec{v}\Vert}$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$a, b_1, b_2 \in \mathcal{P}_a,\ \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{ab_i},\ i = 1, 2$	“	“

Les vecteurs u_i peuvent être orthonormalisés.

2. equation paramétrique et implicite

	eq. paramétrique	eq. cartésienne (implicite)
plan vect $\mathcal{P}_0$	$\overrightarrow{om} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$	$\overrightarrow{om}.\vec{\nu} = 0$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$m = a + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2$	$\overrightarrow{am} \,.\, \vec{\nu} = 0$

Remarque 5 *Avec un repère cartésien, on a 3 équations paramétrique avec 2 paramètres ; 1 équation cartésienne avec 3 inconnues.*

1. Equation cartésienne d'un plan vectoriel orthogonal à un vecteur donné

   Exercice 10 *Un exemple avec des données numériques et dessin.*

2. Equation paramétrique d'un plan vectoriel défini par 2 vecteurs du plan.

   Exercice 11 *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*

3. Equation cartésienne d'un plan affine orthogonal á un vecteur donné et passant par le point a.

   Exercice 12 *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*

4. Equation paramétrique d'un plan affine déini par 2 vecteurs du plan et passant par le point a.

   Exercice 13 *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*

5.2 Droite dans l'espace

1. Vecteur directeur et vecteurs normaux.

	vecteur directeur	vect. dir. unitaire	vect.normaux
droite vectorielle D_0	$b \in D_0,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{ob}$	$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{u}}{\Vert\overrightarrow{u}\Vert}$	$\vec{v_i}\,.\,\tau = 0,\ i = 1, 2$
droite affine D_a	$a, b \in D_a,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$	"	"

2. Equation paramétrique et implicite.

	eq. paramétrique	eq. cartésienne (implicite)
dte vect D_0	$\overrightarrow{om} = \lambda\vec{u}$	$\overrightarrow{om}.\vec{v_i} = 0,\ i = 1, 2$
dte affine D_a	$m = a + \lambda\vec{u}$	$\overrightarrow{am}\,.\,\vec{v_i} = 0,\ i = 1, 2$

Les vecteurs $v_i,\ i = 1, 2$ peuvent être orthonormalisés.

Remarque 6 *Avec un repère cartésien, on 3 équations paramétriques avec 1 paramètre ; mais 2 équations crtésiennes avec 3 inconnues.*

1. Equation paramétrique : 1 point et 1 vecteur ; 2 points.

   Exercice 14 *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*

2. Equation cartésienne avec 1 point et 2 vecteurs normaux ; intersection de 2 plans passant par le point.

   Exercice 15 *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*

3. Vecteur normal à 2 vecteurs : méthode de la projection.

   Exercice 16 *Un exemple avec des donnés numériques et dessin.*

   Exercice 17 *Trouver une équation paramétrique d' un droite définie par équation cartésienne. (lien avec le théorème des fonctions implicites).*

Exercice 18 *feuille droites et plans (equations, intersections, projections)* ***de la classe capes-br de WIMS***

5.3 Projection sur un plan

La projection est caractérisée par :

avec vecteurs directeurs	avec vecteur normal
$(\vec{b} - P_{\mathcal{P}_a}\vec{b})\,.\,u_\alpha = 0$	$(\vec{b} - P_{\mathcal{P}_a}\vec{b}) = \beta\nu$
$P_{\mathcal{P}_a}\vec{b} = a + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$	$((P_{\mathcal{P}_a}\vec{b}) - a)\,.\,\nu = 0$

$(\vec{b} - P_{\mathcal{P}_a}\vec{b})\,.\,u_\alpha = 0$ ou bien

$$(\vec{b} - P_{\mathcal{P}_a}\vec{b}) = \beta\nu$$

et $P_{\mathcal{P}_a}\vec{b} \in \mathcal{P}_a$ ce qui peut se traduire par $((P_{\mathcal{P}_a}\vec{b}) - a)\,.\,\nu = 0$ ou bien $P_{\mathcal{P}_a}\vec{b}) = a + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$.

En pratique, on la détermine par :

première méthode $P_{\mathcal{P}_a}\vec{b} = a + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ avec les paramètres solutions du système linéaire :

$$G\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\,.\,b\\ u_2\,.\,b\end{pmatrix}$$

où

$$G = \begin{pmatrix}u_1\,.\,u_1 & u_1\,.\,u_2\\ u_2\,.\,u_1 & u_2\,.\,u_2\end{pmatrix}$$

Remarque 7 *Dans le cas où u_1, u_2 est orthonormée, G est la matrice identité et la formule revient à calculer les composantes sur ces deux vecteurs.*

deuxième méthode

$$P_{\mathcal{P}_a}\vec{b} = b - a - ((b-a).\nu)\nu$$

Exercice 19 *Soit $\overrightarrow{v^1}\overrightarrow{v^2}$ avec $\overrightarrow{v^1} =^t [1, 0, \epsilon]$ $\overrightarrow{v^2} = [0, 1, \epsilon]$.*

1. *Pour $\epsilon = 0$, équation paramétrique et cartésienne du plan vectoriel Π_0 engendré par $\overrightarrow{v^1}\overrightarrow{v^2}$.*
2. *Pour $\epsilon = 0$, équation paramétrique et cartésienne de la droite engendrée par le vecteur normal à ces 2 vecteurs.*
3. *Calculer la projection sue ce plan Π_0 du point $b = [b_1, b_2, b_3]$*
4. *Pour $\epsilon \neq 0$, équation paramétrique et cartésienne du plan vectoriel Π_ϵ engendré par $\overrightarrow{v^1}\overrightarrow{v^2}$.*
5. *Pour $\epsilon \neq 0$, équation paramétrique et cartésienne de la droite engendré par le vecteur normal à ces 2 vecteurs.*
6. *Calculer la projection sur ce plan Π_ϵ du point $b = [b_1, b_2, b_3]$*
7. *Calculer un développement limité au premier ordre de la projection sur le plan Π_ϵ pour $\epsilon \longrightarrow 0$. Interprétation.*

5.4 Projection sur une droite

Avec les mêmes idées, on trouve :

$$P_{D_a} b = a + \alpha\vec{v} = a + \frac{\vec{v}.(\overrightarrow{ab})}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

6 Droite et plan dans un espace de grande dimension

On se place dans un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension N strictement plus grand que 3. Quand on parle de vecteur **normal**, l'espace est supposé **euclidien**. On utilise des méthodes adaptées à la grande dimension.

Dans tout ce paragraphe, O est un point fixé choisi comme origine dans l'espace affine.

6.1 Plan dans un espace de dimension $N > 3$

1. **Plan :vecteurs directeurs et normaux.**

	2 vecteurs directeurs	N-2 vect.normaux
plan vectoriel $\mathcal{P}_0$	$b_1, b_2 \in \mathcal{P}_0,\ \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{ob_i},\ i = 1, 2$	$\vec{v_j}\,.\,\vec{u}_i = 0,\ j = 1, \ldots, N-2,\ i = 1, 2$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$a, b_1, b_2 \in \mathcal{P}_a,\ \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{ab_i},\ i = 1, 2$	"

Les vecteurs u_i peuvent être orthonormalisés.

2. equation paramétrique et implicite

	eq. param	eq. cartésienne (implicite)
plan vect $\mathcal{P}_0$	$\overrightarrow{om} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$	$\overrightarrow{om}.\vec{v_j} = 0,\ j = 1, \ldots N-2$
plan affine $\mathcal{P}_a$	$m = a + \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$	$\overrightarrow{am}\,.\,\vec{v_j} = 0\ j = 1, \ldots N-2$

Remarque 8 *Avec un repère cartésien, on a N équations paramétriques avec 2 paramètres ; mais $N-2$ équations cartésiennes pour N inconnues.*

6.2 Droite dans un espace de dimension $N > 3$

1. Vecteur directeur et vecteurs normaux.

	vecteur directeur	vect. dir. unitaire	N-1 vect.normaux
droite vectorielle D_0	$b \in D_0,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{ob}$	$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{u}}{\\|\overrightarrow{u}\\|}$	$\vec{v_i} \,.\, \tau = 0,\ i = 1, N-1$
droite affine D_a	$a, b \in D_a,\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{ab}$	"	"

2. Equation paramétrique et implicite.

	eq. param	eq. cartésienne (implicite)
dte vect D_0	$\overrightarrow{om} = \lambda\vec{u}$	$\overrightarrow{om}.\vec{v_i} = 0,\ i = 1, N-1$
dte affine D_a	$m = a + \lambda\vec{u}$	$\overrightarrow{am} \,.\, \vec{v_i} = 0,\ i = 1, N-1$

Les vecteurs $v_i,\ i = 1, 2$ peuvent être orthonormalisés.

Remarque 9 *Avec un repère cartésien, on a N équations paramétriques avec 1 paramètre ; mais $N-1$ équations cartésiennes pour N inconnues.*

6.3 Passage d'équation cartésienne à paramétrique et réciproquement

6.3.1 Equations cartésiennes données

Considérons par exemple, le cas $N = 5$, les équations cartésiennes

$$\overrightarrow{am} \,.\, \vec{v_i} = 0,\ i = 1, 3$$

; pour simplifier considérons une base $e_i, i = 1, ...5$ et supposons (quite à permuter les colonnes) que la matrice 3×3

$$^t v' = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

soit inversible ; notons :

$$^t v" = \begin{pmatrix} v_{14} & v_{15} \\ v_{24} & v_{25} \\ v_{34} & v_{35} \end{pmatrix}$$

notons x' (resp x'') les 3 premières (resp. les 2 dernières) composantes de $\vec{om}$ alors on a une équation *paramétrique* en inversant cette matrice v' dans le système suivant :

$$^t v' x' = -^t v'' x" +^t va$$

avec les 2 paramètres x_4, x_5.

6.3.2 Equations paramétriques données

Réciproquement, considérons les équations pramétriques $m = a + \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$; pour obtenir des équations cartésiennes, il convient d'éliminer λ_1, λ_2 ; pour cela, nous pouvons faire appel à la théorie des ystèmes linéaires : à quelle condition, peut-on déterminer λ_1, λ_2 solution du système linéaire

$$\vec{u_1}\lambda_1 + \vec{u}_2\lambda_2 = \overrightarrow{am}$$

Supposons pour simplifier (quite à permuter les lignes) , que la matrice 2×2

$$u' = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

est inversible; le sytème linéaire a une solution si et seulement si les matrices bordantes sont non inversibles; ce qui peut s'exprimer avec les déterminants de ces matrices bordantes sont nuls. Ceci nous donne les 3 équations :

$$det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & m_1 - a_1 \\ u_{21} & u_{22} & m_2 - a_2 \\ u_{31} & u_{32} & m_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & m_1 - a_1 \\ u_{21} & u_{22} & m_2 - a_2 \\ u_{41} & u_{42} & m_4 - a_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & m_1 - a_1 \\ u_{21} & u_{22} & m_2 - a_2 \\ u_{51} & u_{52} & m_5 - a_5 \end{pmatrix} = 0$$

6.4 Vecteurs et matrices

Pour la suite en grande dimension, nous allons utiliser des matrices. C'est ainsi que le produit scalaire de 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté

$$^t\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u} \tag{22}$$

Nous notons V, une matrice à m lignes et 2 colonnes; nous utiliserons souvent sa décomposition en vecteurs colonnes (notez la position de l'indice de colonne dans ce cours)

$$\overrightarrow{\overrightarrow{V}} = [\overrightarrow{v^1}\overrightarrow{v^2}] \tag{23}$$

$$[^tVV]_i^j =^t v^i\, v^j \tag{24}$$

Une combinaison linéaire de vecteurs s'érit :

$$\sum_i \alpha_i \vec{v^i} = V[\alpha] \quad \text{avec } [\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

6.5 Projections orthogonales

N.B. Ce paragraphe est à la limite du programme du CAPES. Pour des raisons pratiques, le produit scalaire utilisé n'est pas toujours le produit usuel (ie les bases ne sont pas toujours orthonormées); nous utiliserons une matrice Q définie positive :

$$^tvQv \text{ strictement positif} \tag{26}$$

elle sera souvent diagonale à coefficients strictement positifs.

Proposition 1 *Soit M_0 un sous espace vectoriel de dimension d de $\mathbb{R}^m$ déini par un systée libre de vecteurs : $\vec{v^1}\vec{v^2}\ldots\vec{v^d}$; soit $x \in \mathbb{R}^m$; soit $V = [\vec{v^i}]$; la projection Q orthogonale de x sur M_0 est donné par :*

$$P_{M_0}x = \sum_i \alpha_i \vec{v^i} \textit{ avec} \tag{27}$$

$$G[\alpha] =^t VQx \textit{ où } G =^t VQV \tag{28}$$

Démonstration Nous nous limitons au seul cas pratique : d=2. Notons :

$$m = P_{M_0}x$$

Il suffit d'écrire que la projection m se trouve dans le plan et satisfait : le vecteur $\overrightarrow{xm}$ est orthogonal aux 2 vecteurs $\vec{v^1}\vec{v^2}$.

$${}^tVQm =^t VQx \quad \text{avec} \quad m = V[\alpha] \tag{29}$$

D'o le réultat.

Proposition 2 *La projection affine Q-orthogonale sur le sous espace affine M_a passant par a et parallée à M_0 est donné par :*

$$\tilde{P}_{M_a}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + P_{M_0}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) \tag{30}$$

$$\tilde{P}_{M_a}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} - P_{M_0}\overrightarrow{a} + P_{M_0}\overrightarrow{x} \tag{31}$$

ou en définissant le **pivot**

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} - P_{M_0}\overrightarrow{a} \tag{32}$$

$$\tilde{P}_{M_a}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + P_{M_0}\overrightarrow{x} \tag{33}$$

Démonstration La différence avec la projection sur un plan vectoriel : $\tilde{P}_{M_a}\overrightarrow{x} = m$ se trouve dans le plan affine ssi $m-a$ se trouve dans le plan vectoriel paralléle ; et l'on a encore le vecteur $\overrightarrow{xm}$ est orthogonal aux 2 vecteurs $\vec{v^1}\vec{v^2}$.

$${}^tVQm =^t VQx \quad \text{avec } m - a = V[\alpha] \text{ ou} \tag{34}$$

$$m - a = P_{M_0}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) \tag{35}$$

Proposition 3 *La projection affine Q-orthogonale n'est pas une application linéaire mais c'est une application affine : elle conserve le barycentre (voir exercice).*

Exercice 20

1. *Démontrer que la projection affine Q-orthogonale conserve le barycentre.*
2. *Pour un nuage de points du plan, dessiner (avec scilab) : le barycentre ainsi que les projections sur une droite avec le barycentre des projections.*

Proposition 4 *Soit M et $M^\perp$ deux sous espaces vectoriels orthogonaux, alors on a*

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\overrightarrow{P}}_M \overrightarrow{x} + \overrightarrow{\overrightarrow{P}}_{M^\perp} \overrightarrow{x} \tag{36}$$

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tilde{P}}}_{M_a} \overrightarrow{x} + \overrightarrow{\overrightarrow{\tilde{P}}}_{M_a^\perp} \overrightarrow{x} \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

Exercice 21 *Interpréter la proposition ci dessus dans le cas où M_0 est // à des axes de coordonnées.*

Références

[1] Ressources scientifiques pour les enseignants de mathématiques. http ://www.dma.ens.fr/culturemath/.

[2] Université en ligne. Site internet,, http ://www.uel-pcsm.education.fr.

[3] ... Beltramone. *Maths, Terminale S*. Declic. Hachette Education, 2002.

[4] Donedu. *Cours de mathématiques spéciales*. Vuibert.

[5] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudies. *Cours de mathématiques*, volume 4. Dunod, 1977.

[6] R. Ferrachoglou et Ph. Terracher. *Maths, Terminale S*. Terracher. Hachette Education, 2002.

[7] B. Perrin. Wims paris-sud. http ://wims.auto.u-psud.fr/.

[8] G. Xiao. Wims. http ://wims.unice.fr.

Index