Aide mémoire pour les équations différentielles

paragraphe 3-IV du programme complémentaire du CAPES externe de mathématiques et Terminale S

Réalisé dans le cadre du Campus numérique EscaleS:
www.u-escales.org

avec le soutien de l'UFR Sciences de l'UNSA

B. Rousselet [1]

dcembre 2005

[1] *Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice, Cédex 2, email :* br@math.unice.fr *FAX 04 93 51 79 74*

Table des matières

Preparation visée : Capes externe de mathématiques ; remise à niveau pour l' agrégation interne.
Auteur : B ; Rousselet — **Contact :** Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice, Cédex 2, email : br@math.unice.fr FAX 04 93 51 79 74
Nom d' archive :
format du document : .dvi, .ps, .pdf
Date de création : avril 2004
Unités de cours dans laquelle la ressource s'intègre :
Matière : Mathématiques.
Titre : Aide mémoire pour les équations différentielles
Contenu : Cours et exercices pour l'écrit et l'oral avec des commentaires sur des problèmes et des leçons. Peut être utilisé avec des exercices WIMS décrits par ailleurs.
Objectifs de la ressource et niveau : Considère du niveau de la Terminale et donc de l'oral jusqu'au niveau de l'écrit du CAPES.
Volume d'heures apprentissage apprenant : 2*20h
Nature de la ressource : texte.
Programme : paragraphe 3-IV du programme complémentaire du CAPES externe de mathématiques et Terminale S
Commentaire libre : Peut être utilisé avec des exercices WIMS décrits par ailleurs ; l'utilisation des exerices WIMS est indispensable en cas de formation à distance.
bibliographie : [12, 8, 3, 7, 10, 25], [23, 24, 19, 22]
Contexte d'utilisation : **Modalités d'utilisation :** présentiel enrichi ou à distance accompagné **Si tutorat, nombre d'heures :** 10h
Réalisation : **expérience et savoir faire des auteurs :** Plusieurs années d'expérience pour la préparation au CAPES externe ; grande expérience de l'enseigement en analyse numérique, optimisation, mécanique des milieux continus, analyse de données ; recherches en optimisation de systèmes régis par équations aux dérivées partielles issus de la mécanique des milieux continus. **Indication des formats des fichiers finaux :** .dvi, .ps, .pdf, .html ; Tous ces fichiers sont engendrés à partir de fichiers latex avec le paquetage Hyperreff : ils contiennent des liens hypertextes dans toutes leurs versions. **Organisation de la production :** La ressource peut être utilisée dès maintenant mais des détails techniques sont en suspent faute de support technique(ex. : insertions de figures pour certains formats ; tests des fichiers avec diverses versions des navigateurs...).
Valeur d'échange de la ressource : correspond à au moins 2*20 h d'équivalent TD
Coût de la ressource : 100h équivalent TD

Chapitre 1

Orientation

On trouvera de nombreux documents pour la **formation continue** des professeurs de Sciences dans [4] : un site du service commun de formation continue des ENS.

Consultez les rapports de jury

1.1 Introduction

Les équations différentielles sont avec les équations aux dérivées partielles les équations de l'analyse ; un peu comme les équations polynomiales en algèbre.

1.1.1 Des références bibliographiques

On pourra consulter [12, 8, 3, 7, 25],
plus spécifiquement CAPES : [6, 9, 14]

1.1.2 Liens utiles

Le site [23] de l'Université en ligne fournit des supports de cours , exercices interactifs et simulations pour le programme de DEUG en mathématiques, physique, chimie.
Le site WIMS de l l'Université de Nice Sophia-Antipolis [24] fournit de nombreux exercices interactifs de tous niveaux ; il peut être librement téléchargé pour utilisation chez vous. Mais il est conseillé de vous en servir via le réseau internet.
→ Une feuille d'exercices est à votre dispositon dans une classe Wims ; voir avec votre enseignant.
On pourra aussi trouver d' autres documents et exercices sur le cite wims de l'Université de Paris Sud [19] : On trouve des ressource scientifiques pour les enseignants de mathématiques dans [22] et plus généralement les ressources des ENS pour la formation continue : [4]
Voici encore des sites qui peuvent vous rendre des services : megamaths [16].

1.1.3 Le programme du CAPES concerné

Le progamme du CAPES concerné : 3-IV du programme complémentaire
→ le consulter au paragraphe 1.5 de ce polycopié.

Le programme de Terminale : pour les changements intervenus en 2002, voir paragraphe 1.2.1. ; on consultera sur le site du CNDP : http ://www.cndp.fr/lycee/maths les documents d'accompagnement du programme de Terminale S. En particulier le paragraphe : "Un concept important : celui d'équation différentielle" et l'annexe sur la radioactivité. .
Sujets où interviennent des équations différentielles : CAPES 1989, 1996, 2002 ; CAPES agricole 2002 (en algèbre) ; ENS Paris et Cachan 1998 (discrétisation d'une équation hyperbolique linéaire du premier ordre), Polytechnique 2002, filière PC (controle optimal avec un système différentiel).

en 2002 : **leçons :** 86,87 ;

en 2003 : **leçons :**

- 84 : Caractérisation de la fonction exponentielle réelle $x \to e^{ax}$, où a appartient à $\mathbf{R}$, par l'équation différentielle $y' = ay$ et une condition initiale. Applications.
- Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemple.

dossiers : 61, 85,86

en 2004
- l. 81 Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.
- l. 85 Exemples d'approximation d' une solution d' une équation différentielle par la méthode d' Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'un calculatrice.
- l 69 Fonctions exponentielle.

dossiers :

- d. 86 Exemple d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale menant à une équation différrentielle linéaire du premier ordre, du second ordre.

en 2005 : **dossiers :**

- Problèmes issus de la géométrie, de la physique, de la iiomogie, de l'économie, des probabilités ..., conduisant à la résolution d' une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- Exemples de problèmes issus de la géométrie, de la physique..., conduisant à la résolution d' une équation différentielle linéaire du second ordre à coeficients cosntants.

1.2 Différentes approches des équations différentielles

1. Recherche de solution générale explicite : toutes les solutions sous forme explicite par des formules dites de quadrature (i.e ; par calcul de primitives) ; il existe une très abondante littérature mais peu de solutions par rapport à toutes les equations différentielles imaginables ; situation analogue au calcul de primitives. Mais il faut indiquer la possibilité de caractériser la solution de manière implicite. Les systèmes de calcul symbolique ("formel") fournissent de nombreuse solutions explicites ou implicites ; c'est le cas de certaines calculettes comme la TI89. →Voir le chapitre 2

2. Recherche de solution numérique approchée ; l'utilisation d'ordinateurs à partir des années 1950-60 a complètement changé la problématique de la résolution des équations différentielles ; mais de nombreuses méthodes d'approximation numérique existent car il n'existe pas de bonne solution universelle. Le programme complémentaire du CAPES ne parle que de la méthode d'Euler (ou de la tangente, voir le chapitre 3) mais d'autres méthodes peuvent faire l'objet de problèmes : exemple concours ENS Paris-Cachan 1998 pour l'approximaton numérique d'une edp hyperbolique linéaire du premier ordre.→ voir le chapitre 3
3. Existence unicité du problème de Cauchy ; prolongement dans un intervalle maximum. → voir le chapitre 5
4. Les problèmes avec des conditions aux limites (en deux points) ne sont pas au programme mais ont fait l'objet d'un problème complet de CAPES en 1996 . → voir le chapitre 6
5. Dépendance de la solution par rapport à la condition initiale ou à des paramètres de controle : n'est pas au programme mais est très utilisé en pratique (automatique, controle, optimisation, développement de solution par rapport à des paramètres). Voir le problème X 2002 au chapitre 6

1.2.1 Pour le concours depuis 2003 :

Notez que le programme officiel de **Terminale** demande que la presentation de l'exponentielle se fasse à partir de l'équation différentielle !

En pratique, ce n'est pas simple.

- Dans [5], on admet l'existence d'une fonction égale à sa dérivée : $exp' = exp$; dans un autre chapitre, l'existence de cette fonction est ensuite justifiée dans un exercice à partir de la fonction réciproque de la fonction logarithme. Notons que l'existence de la fonction logarithme repose sur l'existence admise de la primitive d'une fonction continue !
- Dans [13] , on admet aussi l'existence d'une fonction égale à sa dérivée : $exp' = exp$; dans un autre chapitre on définit l'intégrale d'une fonction continue positive à partir de l'aire du domaine situé sous la courbe ; d'où la notion de primitive puis celle du logarithme et l'exponentielle comme fonction réciproque.
- Dans [17], la démarche est analogue (logarithme puis exponentielle) ; il semble exclu en Terminale ES de parler d'équation différentielle, alors que c'est un outil important en sciences économiques.
- Dans l'annexe sur la radioactivité des documents d'accompagnement [2], on trouve une **présentation autonome de l'exponentielle** à partir de la discrétisation de l'équation différentielle ; → voir chapitre 3.

1.3 Guide d'étude : comment s'y prendre ?

1. Pour une première approche : il est indispensable de maitriser les équations différentielles linéaires du premier et second ordre et de connaître quelques situations concrètes (mécanique, électricité) se modélisant par une équation différentielle : plongez dans un livre de Terminale, par exemple [5, 13] et

revoyez un cours ou livre de DEUG, par exemple : [18, 8] ; vous pourez ensuite passer au chapitre 4 de ce poly (la méthode de variation des constants est un point déroutant pour les étudiants). On consultera avec profit les documents d'accompagement des programmes [2], en particulier pour les equations différentielles dont le titre : **Un concept important : celui d'équation différentielle** montre que cette question n'est pas à négliger !

Evaluez vous avec des exercicess **WIMS** [24] ; pour les étudiants inscrits à la préparation, une classe virtuelle vous propose des exercices.

2. Les aspects d' approximation numérique sont $\boxed{\text{aussi indispensables}}$ compte tenu de leur grande utilité pratique mais aussi pour leur intéret pédagogique dans la compréhension des équations différentielles : d'où leur introducton en TS des 2003 : voir le chapitre 3.
3. Selon votre temps, apprenez à résoudre explicitement quelques équations différentielles non linéaires comme les équations à variable séparables (→ le chapitre 2) et voyez les questions théoriques comme le théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz au chapitre 5.
4. Consultez aussi le premier cycle sur mesure de l'université en ligne, [23] : la section mathématiques mais aussi la section physique pour des compléments de modélisation en électricité et en mécanique.

1.4 Prérequis : primitives, intégrale définie

Pour des détails, consulter le premier chapitre de [10]. Ici ne sont rappelées que quelques notations et résultats incontournables pour l'étude des équations différentielles.

1. La primitive U d'une fonction u **d'une variable réelle** satisfait :

$$U'(t) = u(t)$$

; elle est définie à une constante près ; contrairement à ce que pourait laisser croire la consultation de livres de premier cycle où l'on trouve de nombreux exercices de calcul de primitives, *on ne sait calculer explicitement que très peu de primitives.*

2. Intégrale définie : $\int_a^b u(t)dt$, c'est un nombre qui est défini pour de très grands ensembles de fonctions ;
   – il faut savoir par exemple que les fonctions continues par morceaux sont intégrables ! Hypothèse suffisante usuellement pour les équations différentielles.
   – vous n'avez pas à connaître l' intégrale de Lebesgue ; mais vous avez le droit de vous en servir avec soin dans un problème d'écrit : les expressions du type "par Lebesgue, on a..." sont à *à proscrire !*

3. *Lien entre primitive et intégrale définie :dérivée d' une intégrale par rapport à sa borne*

$$U(t) - U(t_0) = \int_{t_0}^{t} u(s)ds$$

ou

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} u(s)ds = u(t)$$

ainsi

$$\int_{t_0}^{t} u(s)ds$$

est la primitive qui s'annule en $t = t_0$. **Attention**, la variable d'intégration est s et la borne est t.

4. *Un exemple fréquent* en équations différentielles :

$$\frac{d}{dt} = \int_{t_0}^{t} \phi(s,t)ds = \phi(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial t} ds \qquad (1.4.1)$$

Ici l'on a utilisé, la dérivée d'une intégrale par rapport à sa borne (ci-dessus) et la dérivée sous le signe somme ; pour ce dernier point, voir le polycopié [1] ; une justification se trouve au chapitre 6 (Problème ENS Paris-Cachan 1998).

5. *Une notation délicate à éviter :*

$$\int u(s)ds$$

désigne une primitive quelconque (la constante n'est pas précisée)

6. Une inégalité de base : Si $a < b$ et si $\forall t \in [a, b]$
$$\int_a^b u(s)ds \leq \int_a^b v(s)ds$$
. **Attention**,ce résultat est idiot pour les primitives : la constante n'est pas précisée ! C'est ainsi que $1 \leq 2$, n' entraine aucune relation de comparaison entre les primitives suivantes : $t + 3$ et $2t$.
7. Inégalité de la moyenne pour u à valeur réelle et bornée :
$$(b - a)Inf_{t\in[a,b]}(u(t)) \leq \int_a^b u(s)ds \leq (b - a)sup_{t\in[a,b]}(u(t))$$
8. Accroissements finis pour u continue :
$$\int_a^b u(s)ds = (b - a)u(c)$$
(c'est une conséquance de l'inégalité de la moyenne et du théorème des valeurs intermédiaire).
9. $$|\int_a^b u(s)ds| \leq \int_a^b |u(s)|ds$$
10. Si A est à valeur vectorielle l'intégrale définie est définie sans difficulté et on a aussi :
$$\|\int_a^b \vec{A}(s)ds\| \leq \int_a^b \|\vec{A}(s)\|ds$$

1.5 Le programme complémentaire du CAPES : paragraphe 3.IV.1 Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $M_n(\mathbf{C})$ (respectivement $\mathbf{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t)X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où $a,\ b,\ c$ sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.
Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connat une solution de l'équation sans second membre

associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme. expo

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ (resp. $x'' = f(t, x, x')$), où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$ (resp. de $\mathbf{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler. algo

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variabIe et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan. algo

Chapitre 2

Equations à variables séparables

2.1 Quelques principes

Le programme du CAPES :

c'est une partie du 3-IV-3-c du programme complémentaire : $\rightarrow$ le consulter à la section 1.5.

2.1.1 Idées

Les équations à variables séparables peuvent se résoudre relativement explicitement en passant par une fonction de 2 variables et le *théorème des fonctions implicites ;* rappelons intuitivement la situation : on cherche au voisinage de x_0, y_0, une courbe solution de :

$$y' = f(x,y) \quad \text{avec} \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.1.1}$$

Dérivées et différentielles

Pour ne pas être bloqué dans cette approche, il faut maîtriser les différentes notations pour les dérivées. Cela dépend de la façon de désigner une fonction ; on dispose de deux notations principales :

1. Utiliser 3 symboles : $y = f(x)$ la valeur est désignée par y, la fonction elle même par f ; c'est la notation issue de la théorie des ensembles ; on remarquera que dans le programme de Terminale 2002 : l'introduction de l'exponentielle est faite à partir de l'étude de l'équation différentielle $f' = f$.
2. Utiliser 2 symboles, on parle de la fonction $y(x)$; y désigne à la fois la valeur et la fonction elle même. C'est la notation traditionnelle de l'analyse et bien sûr de la physique ! Le programme de Terminale parle de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

On évitera *l'horreur* suivante trouvée dans des livres de Terminale (auxquels le programme indiqué ci-dessus a tendu une perche) : Une solution

DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' = ay + b$ EST UNE FONCTION DÉRIVABLE f TELLE QUE : $f'(x) = af(x) + b$ alors qu'il suffit de dire : telle que : $y'(x) = ay(x) + b$!!

Insistons sur ce que l'on entend par **solution d'une équation différrentielle :** l'objet recherché est souvent de nature géométrique : un arc ; celui ci peut être représenté de diverses manières : par une fonction $x \longmapsto y$ ou $y \longmapsto x$ par un paramétrage $t \longmapsto \binom{x}{y}$ ou une équation implicite $U(x, y) = 0$.

Montrons quelques exemples où la notation d'une fonction avec 2 symboles est manifestement le plus clair (on pourra consulter [20]) :

1. **Dérivée de fonction réciproque** :
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{2.1.2}$$

2. **Dérivée de fonctions composées** de :
$$t \mapsto x(t) \mapsto y(x(t)) \tag{2.1.3}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{2.1.4}$$

3. **Dérivée de fonctions composées de 2 variables**
$$t \mapsto (x(t), y(t)) \mapsto u(t) = U(x(t), y(t)) \tag{2.1.5}$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dt} \tag{2.1.6}$$

   on remarquera le lien avec la différentielle de U
$$dU = \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial x}dx \tag{2.1.7}$$

4. L'équation (2.1.6) est la dérivée le long de la courbe , $t \longmapsto \binom{x(t)}{y(t)}$ plus précisément : si (dy, dx) est un vecteur tangent à cette courbe, la différentielle suivante est nulle :
$$\frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial x}dx = 0 \tag{2.1.8}$$
   Si x et y sont liées par $U(x, y) = 0$, alors (x, y) est sur une courbe définie implicitement par cette équation et elle peut êtrer paramétrée localement : théorème des fonctions implicites, voir annexe 2.3.1.

5. D'autre part l'équaton différentielle :
$$y' = f(x, y) \text{ peut s'écrire pour une solution paramétrée :} \tag{2.1.9}$$
$$\frac{dy}{dt} = f(x, y)\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \tag{2.1.10}$$
$$dy = f(x, y)dx \tag{2.1.11}$$

6. Pour conclure l'équation différentielle
$$\frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial x}dx = 0 \text{ peut s'intègrer avec :} \quad U(x, y) = 0 \tag{2.1.12}$$

Naturellement cela n 'est constructif pour résoudre

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$$

que si l'on sait calculer U à partir de ses dérivées partielles p et q or cela n'est pas facile ni même toujours possible. D'autre part, la solution est connue de façon implicite et en général, il n'est pas facile d'en tirer une expression explicite ; mais dans le cas des équations à variables séparées, ce programme se met en oeuvre de façon assez simple.

2.1.2 Equations à variables séparées

Elles se présentent sous la forme :

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \quad \text{ou} \ \frac{dy}{dx} + \frac{P(x)}{Q(y)} = 0 \tag{2.1.13}$$

Il est facile de voir en reprenant les remarques de la section (2.1.1) que la solution vérifie :

$$U(x,y) = 0 \text{ avec} \tag{2.1.14}$$

$$U(x,y) = U(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy \tag{2.1.15}$$

On remarquera que cela revient à intégrer le long de la courbe solution l'équation (2.1.13) ; comme la forme différentielle est exacte (c'est la différentielle d'une fonction de 2 variables), cette intégrale ne dépend pas du chemin (voir 2.3.2) :

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x)dx + Q(y)dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(x)\frac{dx}{dt} + Q(y)\frac{dy}{dt}]dt = \int_{x_0}^{x_1} P(x)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(y)dy \tag{2.1.16}$$

alors que l'intégrale de la première égalité est prise le long de la courbe solution, les deux intégrales de la dernière égalité sont des caluls de primitives (voir annexe 2.3.2).

Remarque 1. Pour intégrer l'équation différentielle 2.1.13, la solution est donnée sous forme implicite par 2.1.14 avec U donné par 2.1.15.

Remarque 2. Il arrivera souvent que l'on puisse expliciter x en fonction de y plutôt que l'inverse.

2.2 Quelques exemples

2.2.1 Exemples introductifs

Equation y'-ay=b

Exponentielle L'exemple le plus simple consiste à résoudre $y' = y$ avec $y(x_0) = y_0$. En suivant la méthode 2.1.14, en supposant que $y_0 \neq 0$, on la transforme en :

$$\frac{dy}{y} = dx \tag{2.2.1}$$

On remarque que la dérivée y' a le même signe que y, donc si la donnée initiale y_0 est positive, $y'(0) > 0$. D'autre part en dérivant l'équation on obtient : $y^{(n+1)} = y^{(n)}$; par suite si en x_0, $y(x_0) = 0$, toutes les dérivées sont nulles et la fonction est identiquement nulle au voisinage de x_0 (en la supposant analytique). On peut justifier ceci plus directement avec le thèorème de Cauchy-Lipschitz qui affirme l'existence locale et l'unicité de la solution du problème de Cauchy : si la solution s'annulait en un point x_1, en ce point le problème de Cauchy admet la soluton évidente $y = 0$, comme c'est la seule solution, une solution non nulle ne peut s'annuler en ce point x_1. Les solutions sont donc de signe constant et la formule ci-dessus fournit :

$$x - x_0 = ln\,\frac{y}{y_0} \text{ on peut inverser cette relation :} \tag{2.2.2}$$

$$y = y_0\; exp(x - x_0) \tag{2.2.3}$$

Remarquons que pour $y_0 = 0$, on a la solution $y = 0$; cette formule est donc correcte quelle que soit la condition initiale.

y'=ay+b L'équation $y' = ay + b$ peut être traitée avec la même idée :

$$\frac{dy}{ay+b} = dx \tag{2.2.4}$$

pour la même raison que ci-dessus, $ay + b$ est de signe constant et on obtient :

$$\frac{1}{a}\, ln \frac{ay+b}{ay_0+b} = x - x_0 \tag{2.2.5}$$

ou en inversant le rôle des variables :

$$\frac{ay+b}{ay_0+b} = q\; exp(a(x-x_0)) \text{ que l'on peut expliciter en :} \tag{2.2.6}$$

$$y = \frac{-b}{a} + \frac{ay_0+b}{a}\; exp(a(x-x_0)) \tag{2.2.7}$$

Notons que cette dernière **formule n'est pas à mémoriser** (contrairement à ce que semblent suggérer certains livres de Terminale) ; mais il convient de se rappeler que la solution de l'équation sans second membre $y' = ay$ fait intervenir $exp(ax)$.

Un exemple non linéaire : $x' = x^2$

Pour une donnée initiale $x_0 = 0$, la solution est identiquement nulle (solution stationnaire). On constate que la solution de l'équation est toujours strictement croissante quand $x \neq 0$. Si $x_0 \neq 0$, séparons les variables :

$$dt = \frac{dx}{x^2} \quad \text{d'où} \tag{2.2.8}$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t - t_0 \text{ ou} \tag{2.2.9}$$

$$x = \frac{x_0}{1 + (t_0 - t)x_0} \tag{2.2.10}$$

Il reste à trouver le domaine de définition suivant la donnée initiale ; étudions le signe du dénominateur suivant le signe de la condition initiale :

$$\text{Si } x_0 < 0, \text{ on a } : \tag{2.2.11}$$
$$1 + (t_0 - t)x_0 > 0 \text{ pour } t_0 + \frac{1}{x_0} < t \tag{2.2.12}$$
$$\tag{2.2.13}$$

en particulier la solution est toujours définie pour $t_0 < t$ mais le problème rétrograde a une asymtote verticale en $t = t_0 + \frac{1}{x_0}$; *notons que la solution pour* $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$ n'a aucun sens pour le problème de Cauchy : elle ne peut être reliée à la condition initiale !

Pour $x_0 > 0$, le dénominateur est positif tant que $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$ et la solution a une asymtote verticale en $t = t_0 + \frac{1}{x_0}$; au delà, la solution du problème de Cauchy n'est plus définie. Pour cet exemple nous avons ainsi calculé une solution **maximale** : pour $x_0 \lneqq 0$ la solution est maximale dans $t \gneqq t_0 + \frac{1}{x_0}$; pour $x_0 \gneqq 0$ la solution est maximale dans $t \lneqq t_0 + \frac{1}{x_0}$;

2.2.2 Equation logistique

$$u' = u(1-u) \tag{2.2.14}$$

Cette équation est classique en dynamique des populations ; voir une introduction dans [13] où elle est résolue en utilisant le changement de fonction $v = \frac{1}{u}$. Il est bon de constater avant toute autre étude que la dérivée de la solution a le signe de $u(1-u)$. Avec une calculette **TI 89**, elle peut être résolue avec l'instruction **desolve** : $desolve(y' - y(1-y) = 0, t, y)$; noter que la variable t doit être tapée avant la fonction y. Avec une calculette **Casio**, vous devez d'abord séparer les variables manuellement ; puis, vous pouvez vous en servir pour intégrer. On peut la résoudre en séparant les variables :

$$\frac{du}{u(1-u)} = dt \text{ d'où} \tag{2.2.15}$$
$$ln \frac{u}{1-u} \frac{1-u_0}{u_0} = t - t_0 \text{ d'où} \tag{2.2.16}$$
$$\frac{u}{1-u} = \frac{u_0}{1-u_0} exp(t - t_0) \tag{2.2.17}$$

Comme pour l'exponentielle, si $u(1-u) = 0$, l'équation différentielle fournit $u' = 0$ puis en dérivant l'équation différentielle : $u'' = u'(1-2u) = 0$, d'où en dérivant encore toutes les dérivées sont nulles et la solution est nulle au voisinage (en admettant qu'elle est analytique ou avec le théorème de Cauchy-Lipchitz comme pour l'équation $y' - ay = b$ voir section 2.2.1)et donc partout : $u = 0$ et $u = 1$ sont solutions stationaires.

Remarque 3. Quel est le lien avec le théorème de Cauchy-Lipschitz ? (voir section 5.1) ; ce théorème n'affirme pas l'existence d'une solution sur tout l'intervalle où $u(u-1)$ est définie car celle ci n' est pas globalement lipshitzienne .

Remarque 4. Cette équation, avec un modèle biologique a fait l'objet d'un problème de baccalaureat national en 2003. On pourra aussi consulter [13] et pour de nombreux compléments : [3].

2.2.3 Exercices

Exercice 1. – Résoudre $\dot{x} = \sqrt{x}$ avec $x(0) = x_0$; distinguer suivant que x_0 est nul ou pas ; lien avec le théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Résoudre avec votre calculette : symboliquement et numériquement (varier la condition initiale) ; représentation graphique.

Exercice 2. Résoudre $y' = exp(x + y)$ avec $y(0) = y_0$.

Exercice 3. – Résoudre $x' = g(t)x^2$ avec $x(0) = x_0$; distinguer suivant que x_0 est nul ou pas ; lien avec le théorème de Cauchy-Lipschitz.
- Cas particulier : $g(t) = \frac{t}{2}$; voir avec les conditions initiales : $x(0) = 1$, $x(2) = -\frac{1}{3}$, $x(0) = -1$.
- Résoudre avec votre calculette : symboliquement et numériquement (varier la condition initiale) ; représentation graphique.

Exercice 4. Résoudre $x' = g(t)\ x\ exp(-x)$.
(**Indication :**la primitive de $\frac{e^x}{x}$ ne peut pas s'exprimer avec des fonctions élémentaires, finir la résolution numérique et graphique avec la calculette .)

Exercice 5. Résoudre $y' = \frac{2x+y}{2y-x}$ (**Indication :** la forme différentielle associée est la différentielle exacte d'une fonction U à déterminer ; réduire l'équation de la conique obtenue.)

Exercice 6. Résoudre $y'\ ln2 = 2^y$ (**Indication :** On pourra résoudre en séparant les variables mais on pourra aussi faire le changement de fonction $z = 2^{-y}$ (suggérée dans un sujet de CAPES de 1989) ; mais dans les 2 cas préciser le domaine de définition de la solution suivant la condition initiale.)

Exercice 7. Résoudre $xy' - y = 0$ (**Indication :** On pourra séparer les variables ; essayer aussi le facteur intégrant $\frac{1}{r^2}$; quel lien avec la différentielle $d\theta$; naturellement on peut aussi la traiter en tant qu'équation linéaire)

Exercice 8. Résoudre $(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$ (**Indication :** $\frac{1}{r^4}$ est un facteur intégrant ; reconaitre la courbe implicite en coordonnées cartésiennes et polaires).

Exercice 9. Résoudre $x^3y' + y^3 = 0$ (**Indication :** séparer les variables ; préciser les asymptotes suivant les conditions initiales)

2.2.4 Equation se ramenant au premier ordre

Une forme d'équation du second ordre se ramenant au premier ordre :

$$\ddot{y} = f(y) \tag{2.2.18}$$

$\dot{y}$ est un facteur intégrant : $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \int f(y)dy) = 0$ et cette équation peut s'intégrer par séparation des variables ; si cette intgration est dlicate, on peut aussi l'tudier qualitativement. Cette équation correspond à des exemples mécaniques : y désigne la position d'une particule soumise à une force $f(y)$; l'équation du premier ordre traduit la conservation de l'énergie.

Exercice 10. Voici des exemples :

1. $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$
2. $\ddot{y} + \frac{\omega^2}{y^2} = 0$
3. $\ddot{y} + \omega^2 sin(y) = 0$
4. $\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = 0$ (discuter qualitativement suivant la forme du graphe de $F(y) = \frac{y^2}{2} + \epsilon \frac{y^4}{4}$).

2.3 Annexe

2.3.1 Fonctions implicites

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \tag{2.3.1}$$

alors si U continument différentiable et si par exemple $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, on a une courbe graphe de $x \longmapsto y(x)$ solution locale de (2.3.1) et sa dérivée vérifie :

$$\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{2.3.2}$$

c'est ce qu'affirme le théorème des fonctions implicites (voir par exemple [12], [18]).

Exercice 11. Préciser le lien de $U = x^2 + y^2 - R^2$ avec les équations différentielles :

$$xx' + y = 0 \quad \text{ et } x + yy' = 0 \tag{2.3.3}$$

Préciser les domaines de validité des solutions et comparer avec la représentation par une foncton de la courbe définie implicitement par $U(x, y) = 0$.

2.3.2 Intégration de formes différentielles

Voir [12]

Theorem 2.3.1. *Soit γ un arc géométrique orienté allant de (x_0, y_0) à (x_1, y_1)défini par une paramétrisation $\mathcal{C}^1$ et soit U une fonction numérique définie au voisinage de γ, alors :*

$$\int_\gamma dU = U(x_0, y_0) - U(x_1, y_1) \quad\quad ou \tag{2.3.4}$$

$$\int_\gamma \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = U(x_0, y_0) - U(x_1, y_1) \quad\quad ou \tag{2.3.5}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt = U(x_0, y_0) - U(x_1, y_1) \tag{2.3.6}$$

Chapitre 3

Approximation numérique

Le progamme du CAPES : 3-IV 3 b. est très limité. → le consulter à la section 1.5
Cependant, diverses méthodes peuvent faire l'objet de problèmes : exemple concours ENS Paris-Cachan 1998 pour une edp hyperbolique linéaire du premier ordre. Certaines idées sous-jacentes peuvent intervenir dans un problème d'algèbre (CAPES agricole, 2002). Consulter pour l'approximation numérique de l' équaton de la chaleur, les ressources scientifiques pour les enseignants de mathématiques : [22]

3.1 La méthode d'Euler ou de la tangente

Il est suggéré d'utiliser cette méthode pour introduire l'exponentielle en terminale ; consulter un livre de terminale, par exemple : [5, 13].

Voir [2] les documents d'accompagnement du programme de Terminale S ; en particulier l'annexe sur la radioactivité.

3.1.1 Le schéma

On considère l'équation différentielle

$$x' = f(t,x) \quad \text{avec la condition initiale :} \tag{3.1.1}$$
$$x(t_0) = x_0 \tag{3.1.2}$$

Notons avec le paragraphe 1.4 que cette équation peut s'écrire sous forme intégrale :

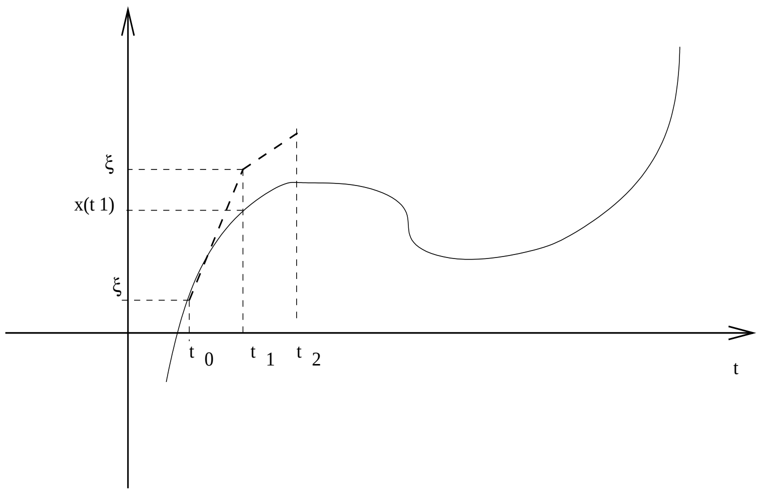
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x)ds \tag{3.1.3}$$

Attention, la variable d'intégration est s et la borne t !

Bien que l'on dispose d'un théorème assez général d'existence (pour f lipschitzienne par rapport à x voir paragraphe 5.1, on ne peut expliciter de solutions que pour une collection limitée de cas particuliers ; il est fréquent dans les applications de ne pas pouvoir résoudre explicitement une telle équation ; la méthode d'Euler s'applique au cas où f est à valeur vectorielle, le cas de systèmes d'équations différentielles, mais le programme complémentaire nous limite au cas scalaire. Cette méthode permet de résoudre de façon approchée l'équation (3.1.1) pour une f lipschitzienne générale.

Le schéma d'Euler explicite

Il est aussi appelé de la *tangente, faire un dessin* ; à l'étape n, on notera que l'on utilise la tangente qui passe par le point calculé mais ce n'est pas la tangente à la courbe exacte comme c'est le cas pour la première étape.



Ξ

FIG. 3.1 – Euler explicite

Exercice 12. Avec la calculette, dessiner le champ de vecteur tangent.

Voici le schéma :

$$\xi_{n+1} = \xi_n + hf(t_n, \xi_n) \quad \text{avec le condition initiale } \xi_0 = x_0 \tag{3.1.4}$$

Exercice 13. 1. Ecrire le schéma d'Euler pour l'équation $x' = ax$

2. Idem pour $x' = x(x-1)$

3.1.2 Propriétés

Stabilité

L'idée est de vérifier si de petites perturbations du schéma ne perturbent pas trop la solution approchée.

Definition 3.1.1. Pour les perturbations :

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + hf(t_n, \zeta_n) + hd_n \quad \text{avec la condition initiale } \zeta_0 = x_0 + \mu \tag{3.1.5}$$

le schéma est dit stable si il existe M_1, M_2 tels que :

$$\|\xi - \zeta\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq M_1|\mu| + M_2\|d\|_{\mathbb{R}^n} \tag{3.1.6}$$

Proposition 3.1.1. *Si f est lipschitzienne par rapport à x alors le schéma d'Euler est stable.*

la démonstraton repose sur un lemme de type Gronwall discret (voir 5.3.1 pour la verson continue :

Lemme 3.1.1. *Si avec $A \geq 0$, $B \geq 0$, on a*

$$\epsilon_{n+1} \leq (1+A)\epsilon_n + B \quad \textit{pour n=0,...,N} \tag{3.1.7}$$

$$\epsilon_0 \geq 0 \quad \textit{alors} \tag{3.1.8}$$

$$\epsilon_n \leq \epsilon_0 e^{nA} + \frac{e^{nA} - 1}{A} B \tag{3.1.9}$$

Exercice 14. Démontrer ce lemme (indication :on pourra s' inspirer de la démonstration qui fournit ϵ_n pour le cas ou 3.1.7 est remplacé par : $\epsilon_{n+1} = (1+A)\epsilon_n + B$ pour n=0,...,N et utiliser : $1 + A \leq exp(A)$. Voir aussi la démonstration du lemme de Gronwall 5.3.1)

Consistence

Cette appelation consacrée par l'usage est une utilsation un peu erronée d'un mot anglais ; il vaudrait mieux dire **cohérence** du schéma avec l'équation différentielle. Elle consiste à évaluer comment la solution exacte de l'équaton différenitielle satisfait approximativement le shéma

Definition 3.1.2. Le schéma d'Euler explicite est dit consistant si

$$\lim_{h\to 0} Max_{t_n} |\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} - f(t_n, x(t_n))| = 0 \tag{3.1.10}$$

et dit d'ordre 1 si :

$$\exists c \geq 0, \ |\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} - f(t_n, y(t_n))| \leq ch \tag{3.1.11}$$

Proposition 3.1.2. *Si la solution de l'équation différentielle est continument dérivable, le schéma d'Euler est consistant ; si la solution est 2 fois continument dérivable, le schéma est d'ordre 1.*

Convergence

Proposition 3.1.3. *Quand le schéma est stable et consistant, il est convergent :*

$$\textit{Avec } t_n = nh = c^{te} \quad Max_n|\xi_n - x(t_n)| \to 0 \textit{ quand } h \to 0 \tag{3.1.12}$$

si de plus x'' est continue :

$$Max_n|\xi_n - x(t_n)| \leq M_2 h Sup_{t\in[0,T]}(|x''|) \tag{3.1.13}$$

Exercice 15. 1. Vérifier avec la calculette l'erreur de l'approximation de l'équation modèle :

$$x' = ax \text{ avec } x(0) = x_0 \tag{3.1.14}$$

2. lien avec le document d' accompagnement du programme de T.S : voir [2].
3. Comparer avec la solution numérique proposée par votre calculette.

3.2 Autres schémas

Ces schémas ne sont pas dans le programme complémentaire du CAPES.

Stabilité absolue et Euler implicite

Lorsque la solution exacte est décroissante bornée, il est souhaitable que la solution vérifie la même propriété ; on parle alors de schéma absolument stable.

Exercice 16. Avec $a < 0$, pour quelle valeur de h, le schéma d'euler est-il absolument stable

Le schéma d'Euler implicite est plus stable :

$$\eta_n = \eta_{n-1} + haf(t_n, \eta_n) \text{ avec } \eta_0 = x_0 \tag{3.2.1}$$

Exercice 17. Etudier ce schéma pour l'équation modèle :

1. représentation graphique
2. Stabilité
3. consistance
4. Stabilité absolue
5. lien avec le document d'accompagnement de TS : [2].
6. Comparer avec la solution numérique proposée par votre calculette.

Autres approximations

Intégration numérique

Exercice 18. 1. Vérifier le lien entre l'équation différentielle et l'équation intégrale :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s))ds \tag{3.2.2}$$

2. En utilisant une approximation par un rectangle à gauche, quel schéma trouvez vous ?
3. Idem avec un rectangle à droite.
4. Idem avec un trapèze.
5. Comparer avec la solution numérique proposée par votre calculette.

Euler modifié ou RK2

Exercice 19. Soit le schéma :

$$\xi_{n+\frac{1}{2}} = \xi_n + \frac{h}{2} f(t_n, \xi_n) \tag{3.2.3}$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + h f(t_{n+\frac{1}{2}}, \xi_{n+\frac{1}{2}}) \tag{3.2.4}$$

Etudier

1. Représentaton graphique
2. stabilité
3. consistance
4. convegence
5. Comparer avec la solution numérique proposée par votre calculette.

Chapitre 4

Equations différentielles linéaires

Le programme complémentaire : paragraphe 3-IV : 1 et 2 ; → le consulter à la section 1.5.

De nombreux exercices wims sont à votre disposition aller en [24] ; demandez à votre enseignant la classe virtuelle qui, vous est attribuée.

. Consultez aussi le premier cycle sur mesure de l'Université en ligne : [23] ; la section mathématiques mais aussi la section de physique peut vous permettre de faire le point pour les aspects électriques et mé caniques.

Ce chapitre est très classique et comprend des notions de niveau Terminale, consulter des livres de Terminale, par exemple : [5, 13].

4.1 Introduction

On retiendra que l'exponentielle est au coeur des équations différentielles à cause de la $\boxed{\text{relation } \frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}}$ i.e. l'exponentielle est solution de : $y' = ay$

linéarité : signifie que si $y_1,\ y_2$ sont 2 solutions avec seconds membres $b_1,\ b_2$, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est encore solution avec second membre $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$: même propriété qu' en algèbre linéaire : pour les solutions de $AU = B$ avec A, matrice rectangulaire avec plus de colonnes que de lignes.

homogène : c'est une équation appelée aussi sans second membre ce qui veut dire avec second membre nul ; à rapprocher d'un système linéaire avec second membre nul $AU = 0$. Noter que $y' = 0$ entraine $y = cte$ soit une infinité de solutions ; plus généralement une équaton différentielle a une infinité de solutions ; mais en précisant la conditon initiale, on récupère en général l'unicité pour les équations linéaires ; voir la section : 4.5.

4.2 Equation y'=ay+b

La **Leçon 86** traite de la caractérisation de l'exponentielle à l'aide de l'équaton différentielle $y' - ay = 0$ avec a constant.

Traitée dans tous les livres de Terminale S avec plus ou moins de bonheur, par exemple chapitre 4 de [5], chapitre 5 de [13]. Cette équation peut être aussi considérée comme un cas particulier d'équation à variables séparables ; voir section 2.2.1 l'exercice 7

Pour le cas où a est une fonction, la solution de $y' = ay$ est

$$y = y(0)\ exp(\int_0^t a(s)ds)$$

4.2.1 Méthode de variation des constantes

Un **principe** pour les équations linéaires : les solutions de l'équation linéaire inhomogène, peuvent s'écrire comme la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particuliére de l'équation inhomogène. **Ce principe est faux en présence de nonlinérités**.
En **géométrie affine,** quand on a une paramétrisation d'un sous-espace vectoriel, on en déduit un paramétrage du sous espace affine parallèle en rajoutant une solution particulière ; ce principe est faux pour des équatons non linéaires : voir document de géométrie affine.
La méthode variation des constantes permet de trouver une solution particulière de l'équation inhomogène. L'idée est de partir de la solution de l'équation homogène et de chercher une solution générale de l'équation inhomogène en faisant varier la constante : dans le cas oú a est constante, on cherche la solution de la forme : $y = u(t)e^{at}$; on trouve que $\dot{u} = e^{-at}$ d'oú la solution :

$$y = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}b(s)ds \tag{4.2.1}$$

Exercice 20. Vérifier que cette formule donne bien la solution

4.3 Exemples

De nombreux *exemples* de situations physiques modélisées avec une équation différentielle linéaire se trouvent dans les livres de Terminale S ; par exemple [5], [13] : désintégration de noyaux radioactifs, circuit électrique avec résistance et inductance, loi de refroidissement de Newton. Mais de nombreux exemples concernent aussi la dynamique des populations, dans ce cas seul le modèle peu satisfaisant de Malthus est décrit par une équation linéaire ; des exemples se trouvent dans [13] ; voir aussi le paragraphe 2.2. Il est conseille de résoudre le sujet du baccalauréat 2003, TS, problème national. Voir les commentaires du programme de Terminale S, [2], **Voici quelques pistes.**

4.3.1 Désintégration radioactive

(en suivant les commentaires du programme de Terminale S) :

Exercice 21. Certains noyaux atomiques comme le carbone 14 peuvent se désintégrer ; l'expérience suggère que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est à dire dont le nombre est de l' ordre du nombre d'

Avogadro, soit 6×10^{23}), le nombre *moyen* de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d' un instant t est proportionnel au nombre d'atomes $N(t)$ et à Δt :

$$\Delta N = -\lambda N(t)\Delta t \tag{4.3.1}$$

1. On suppose que N est dérivable, écrire une équation différentielle vérifiée par N et la résoudre.
2. On désigne par $T_{\frac{1}{2}}$ la demie vie ou la période de l'élément : temps au bout duquel le nombre de noyaux a diminué de moitié ; exprimer cette demi-vie en fonction de λ.
3. Pour le carbone-14, la période est de 5730 ans (alors que pour l'uranium-238, elle est de 4.5×10^9 ans) ; chez les êtres vivants, le carbone-14 est renouvelé constament puis il se désintègre ; par exemple dans des os on trouve qu'il reste 70 pour cent de la quantité initiale de carbone-14 ; quel ge a-t-il ?

4.3.2 Loi de refrodissement de Newton

Loi : la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.

Exercice 22. 1. La température du corps est notée θ, déduire de cette loi, une équation différentielle vérifiée par cette température.
2. Dans une piéce à température 20^0C, on met du thé à température 80^0C ; au bout de 2 mn, il est à 60^0C ; dans combien de temps sera-t-il à 40^0C ? (indication : 5,41mn).

4.3.3 Circuit électrique : générateur, résistance, condensateur, bobine d'induction

On pourra consulter pour des complements dans les documents de physique du premier cycle sur mesure : [23]. Voici les éléments essentiels pour les 3 dipoles les plus courants avec les unités données dans le système internatoinal :

Résistance : La loi d'Ohm :

$$u = v_B - v_A = Ri$$

avec u en volts, la résistance R en Ohm, et l' intensité i du courant en ampères.

Condensateur

$$u = v_B - v_A = \frac{q}{C}$$

ou $\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}$ en posant $i = \frac{dq}{dt}$ avec la charge q en Coulomb, la capacité C en Farad.

Bobine d'induction : loi de Lenz :

$$u = v_B - v_A = L\frac{di}{dt}$$

avec l' inductance L en Henry.

générateur

$$v_B - v_A = e$$

avec e force électromotrice du générateur.

Pour les circuits, il suffit d'utiliser (loi de Kirchoff) que le long d'un circuit les différences de potentiel s'ajoutent. Exemples de circuits :

Résistance, bobine, génerateur On a

$$e = v_B - v_A = v_B - v_C + v_C - v_A = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Résistance, condensateur, générateur On a

$$e = v_B - v_A = v_B - v_C + v_C - v_A = Ri + \frac{q}{C} = RC\frac{dv}{dt} + v$$

en notant $v_C - v_A$.

Résistance, condensateur, bobine, générateur On a

$$e = v_B - v_A = v_B - v_C + v_C - v_D + v_D - v_A = Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}$$

On notera que pour les 2 premiers circuits, on aboutit à une équation du premier ordre alors que le dernier exemple conduit à une équation du second ordre étudiée ci dessous.

4.4 Equation y"+ay'+by=f

En Terminale, cette équation est seulement étudiée en physique. Toutefois [13] propose en problème $y'' + \omega^2 y = 0$ très utilisée en physique (ex : oscilateur libre non amorti).

Il me parait **indispensable** de savoir trouver les solutions de *l'équation homogène* sous la forme exponentielle ou sinu-cosinus avec la classique équation caractéristique ! Voici une présentation possible.

Comme l'exponentielle a un comporment simple par dérivation, nous cherchons une solution particulière de

$$y'' + ay' + by = 0$$

de la forme :

$$e^{rt}$$

; en substituant, on trouve facilement que r doit être solution de l'équation dite caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0$$

Pour le cas fréquent où a, b sont réels, les soutions r_1, r_2 peuvent être réelles ou complexes conjuguées ; le cas réel est sans difficulté ; pour le cas complexe, la solution générale peut s'écrire :

$$\lambda e^{rt} + \mu e^{\bar{r}t} \tag{4.4.1}$$

mais avec des coefficients réels, on cherche le plus souvent une solution réelle ; on peut écrire $r = \chi + i\omega$ et il convient de se rappeler que λ, μ sont complexes et que l'on peut se restreindre à $\mu = \bar{\lambda}$; alors $A = \lambda + \mu$ et $B = \lambda - \mu$ sont réels et la solution générale réelle peut s'écrire :

$$e^{\chi t}\left(Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)\right) \tag{4.4.2}$$

Racine double chercher une deuxième solution en changeant de fonction inconnue : $y = u(t)e^{r_0 t}$ avec r_0 la racine double.

Pour le cas *avec second membre,* la méthode de variation des constantes est un peu subtile ; voir plus loin §4.5.2 ; mais dans les cas usuels, on peut remarquer :

Lemme 4.4.1. *La dérivée d'une fonction exponentielle-polynòme est encore une exponentielle-polynòme :*

$$(P(t)e^{rt})' = (P'(t) + rP(t))e^{rt} \tag{4.4.3}$$

On peut donc chercher la solution d'une équation différentielle linéaire avec second membre exponentielle-polynòme sous la forme d'une exponentielle polynòme et la déterminer *par identification.*

Remarque 5. Dans le cas de racines caractéristiques non réelles, on peut chercher la solution sous la forme produit d'un polynòme par $(Acos\omega t + Bsin\omega t)e^{\rho t}$ mais on peut aussi chercher la solution avec une exponentielle complexe.

Exercice 23. Chercher la solution d'équation avec les seconds membres : $f = 1$, $f = t$,

$f = cos(\alpha t)$, dans le cas où les solutions de l'équation caractéristique sont imaginaires pures, distinguer le cas où α est différent de ces solutions ou au contraire est égal à une de ces racines (phénomène physique de résonance très important en pratique).

> **Voici quelques pistes.** Cette équation peut modéliser de nombreuses situations physiques, notament en mécanique des solides articulés et en génie électrique.
> En **mécanique,** le principe fondamental remonte à Newton : pour un point matériel (objet de petite taille par rapport à l'expérience, cela revient à négliger la rotation par rapport au centre de gravité) : $m\gamma = F$ oú m est la masse du point matériel, γ son acccélération et F, la somme des forces appliquées. Pour le système masse-ressort-amortisseur figure 4.1 ; les forces sont dues au ressort et à l'amortisseur : $F = -ku - \xi\dot{u}$; k est un nombre positif, la rigidité du ressort et ξ, le coefficient d'amortissement aussi positif ; le signe moins indique qu'il s'agit de forces de rappel à la position d'équlibre. Si l'on exerce une force supplémentaire, on aboutit à l'équation du petit problème ci-dessous.

4.4.1 Un système mécanique

Dans ce problème, on utilisera la *méthode de variation des constantes.* Voir **Lecon 87** dans chapitre 7 et le paragraphe 4.5.2
Voir exo 27 pour une justification de la méthode de variation des constantes.

Exercice 24. **Petit problème**

On considère un système masse- ressort-amortisseur modélisé par

$$m\ddot{u} + \xi\dot{u} + ku = f(t) \text{ avec} \quad (4.4.4)$$

$$u(0) = u_0 \quad \dot{u}(0) = u_1 \quad (4.4.5)$$

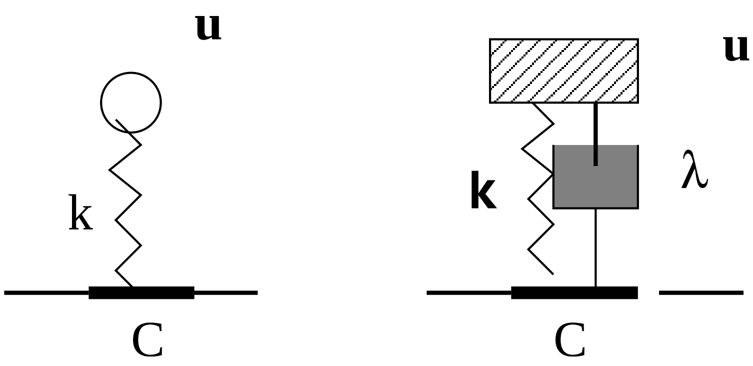


FIG. 4.1 – masse-ressort-amortisseur

1. En partant de la loi de la dynamique du point matériel ($\vec{F} = m\vec{\gamma}$), et de loi linéaire pour le ressort ($f = -ku$) et amortisseur ($f = -\xi u'$), justifiez l'équation différentielle ci-dessus.
2. Variante : parachutage; l'amortisseur est ici constitué par l'air avec la mme loi, la force est le poids constant.
3. Intégrez l'équation du parachutage; application numérique : $g = 9.81 m/s^2$ $k = 20kg/s$, $m = 60kg$
4. Solution de l'équation homogène; précisez pour quelles valeurs de ξ, la masse est bien amortie.
5. Solution avec second membre; montrer (indication : voir exercice 27) :

$$u = \frac{1}{m(r_2 - r_1)} \int_0^t \left[exp(r_2(t-s)) - exp(r_1(t-s))\right] f(s)ds \quad (4.4.6)$$

$$+x_0 e^{r_1 t} + x_1 e^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad (4.4.7)$$

$$x_0 = \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1} \quad x_1 = \frac{u_0 r_1 - u_1}{r_1 - r_2} \quad (4.4.8)$$

6. En absence d'amortissement, vérifier la formule de Duhamel :

$$u = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(s) sin(\omega(t-s)ds \quad (4.4.9)$$

7. Dans le cas où $f = Fsin(at)$, expliciter la solution.
8. En notant $\hat{u}(\omega) = \int_0^{+\infty} xe^{-i\omega t}$, montrer que

$$\hat{u}(\omega) = (mu_1 + (\xi + i\omega m)u_0 + \hat{f})h(\omega) \text{ avec} \quad (4.4.10)$$

$$h(\omega, \xi) = \frac{1}{k - m\omega^2 + i\omega\xi} \quad (4.4.11)$$

9. Montrer que $\xi \longmapsto h$ est décroissante.
10. Etudier la convergence de h quand $\xi \to 0$; uniformité ?
11. Tracer les graphes de $\omega \longmapsto |h|^2$ en fonction de ξ.
12. Etudier $\omega \longmapsto \theta$ où θ est l'argument de h.
13. En déduire le tracé de la courbe décrite par $\omega \longmapsto h$ dans le plan complexe (dite de Nyquist).

4.5 Systèmes différentiels linéaires

4.5.1 Introduction

Pour les systèmes différentiels

$$X' = A(t)X + b(t) \text{ avec } X(t_0) = X_0 \tag{4.5.1}$$

L'existence et l 'unicité de la solution doivent être connues mais il est explicitement **admis** dans le programme complémentaire ; on pourra trouver une démonstration dans [12] tome 4 ch. 1 ; voir un énnoncé dans la section 5.1. La dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est demandé. Je vous fais remarquer que le calcul effectif de solutions est en général très difficile voire impossible ; en revanche le cas où A est une matrice constante est bien connu : exponentielle de matrice ! On peut donc écrire la solution avec les valeurs propres et vecteurs propres de A. Voir le paragraphe 4.5.2.

Les équations différentielles linéaires d'ordre n s'y ramènent par la transformation classique :

$$y' = y_1 \tag{4.5.2}$$
$$y_1' = y_2 \tag{4.5.3}$$
$$. \tag{4.5.4}$$
$$. \tag{4.5.5}$$
$$. \tag{4.5.6}$$
$$y_{n-1}' = -a_1 y_{n-1} ... - a_n y + b \tag{4.5.7}$$

Pour résoudre effectivement avec des coeffients constants, il suffit d'utiliser les solutions du polynome associé à l'équation différentielle (vérifier que ce sont les valeurs propres de la matrice du système). Question posée à **l'écrit d' analyse du CAPES 2002.**

4.5.2 Méthode de variation des constantes

La méthode de **variation des constantes** est dans le programme complémentaire pour un système différentiel linéaire. Ici, nous nous limitons au cas où A est une matrice constante (voir [12] pour le cas d'une matrice $A(t)$ qui dépend du temps).

Système à coefficients constants

; voir problème X 2002, filière PC dans le chapitre 6 Nous nous limitons au cas courant oú la matrice A ne dépend pas du temps :

$$X' = A\,X + b(t) \text{ avec } X(t_0) = X_0 \tag{4.5.8}$$

Système homogène Nous considérons le système homogène associé :

$$Y' = AY \text{ avec } Y(t_0) = Y_0 \tag{4.5.9}$$

La proposition suivante donne quelques propriétés qui généralisent l'exponentielle de variable réelle au cas matriciel :

Proposition 4.5.1. *Le système* (4.5.9) *admet une unique solution notée*

$$Y = exp(tA)Y_0 \tag{4.5.10}$$

oú la matrice $exp(tA)$ *vérifie :*

$$\forall\, t \in \mathbf{R}\; exp(tA)A = Aexp(tA), \forall\, s, t \in \mathbf{R}\; exp((s+t)A) = exp(As)\, exp(tA) \tag{4.5.11}$$

mais quand les matrices ne commutent pas : $exp(A+B) \neq exp(A)exp(B)$ (4.5.12)

$$exp(tA) = \sum_0^{+\infty} \frac{A^k\, t^k}{k!} \quad et \quad \|exp(tA)\| \leq exp(\|A\||t|) \tag{4.5.13}$$

Quand A *est diagonalisable, en désignant par* η *les composantes de* Y *dans une base de vecteurs propres :* $Y = P\eta$*, et par* λ_k *les valeurs propres on a :*

$$\frac{d}{dt}\eta_k = \lambda_k \eta_k \tag{4.5.14}$$

et

$$exp(\Lambda) = \begin{pmatrix} exp(\lambda_1) & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & exp(\lambda_2) & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & exp(\lambda_3) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & exp(\lambda_n) \end{pmatrix} \tag{4.5.15}$$

Variation des constantes On cherche une solution de l'équation inhomogène en faisant varier les constantes dans (4.5.10) : $X(t) = exp(tA)u(t)$.
$\boxed{\text{Attention } u \text{ est un vecteur!}}$

En dérivant cette expression, on trouve facilement comme dans le cas scalaire,

$$Y = exp(tA)\; y_0 + \int_0^t exp((t-s)A)b(s)ds \tag{4.5.16}$$

Equation différentielle du second ordre On peut la transformer en un système du premier ordre avec

$$z = \frac{d}{dt}y \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$

La solution peut alors se préciser avec la formule ci-dessus ; toutefois le calcul explicite de l'exponentielle est fastidieux.

Exercice 25. Vérifier que

$$exp(A) = \begin{pmatrix} exp(r_1) & exp(r_2) \\ r_1 exp(r_1) & r_2 exp(r_2) \end{pmatrix} \tag{4.5.18}$$

avec r_1, r_2 solutions de l'équation caractéristique.

On peut s'inspirer de la solution du cas homogène pour chercher la solution en variant les constantes : La solution du problème homogène peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} y_h \\ y_h' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exp(r_1 t) & exp(r_2 t) \\ r_1 exp(r_1 t) & r_2 exp(r_2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{4.5.19}$$

On peut alors chercher la solution de l'équation inhomogène sous la forme :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} exp(r_1 t) & exp(r_2 t) \\ r_1 exp(r_1 t) & r_2 exp(r_2 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{4.5.20}$$

où u et v sont deux fonctions à d'éterminer. On trouve alors les conditions :

$$u' exp(r_1 t) + v' exp(r_2 t) = 0 \tag{4.5.21}$$

$$r_1 u' exp(r_1 t) + r_2 v' exp(r_2 t) = f \tag{4.5.22}$$

La première permet d'en conclure que $u' = \rho exp(r_2 t)$ et $v' = -\rho exp(r_1 t)$; d'oú ρ en reportant dans la seconde ;

$$\rho = fracfexp(-(r_1 + r_2)t)r_1 - r_2 \tag{4.5.23}$$

on en déduit la solution de l'équation inhomogène en résolvant :

$$u' = \frac{fe^{-r_1 t}}{r_1 - r_2} \tag{4.5.24}$$

$$v' = \frac{-fe^{-r_2 t}}{r_1 - r_2} \tag{4.5.25}$$

Exercice 26. Utiliser cette méthode pour retrouver des cas classiques ; voir exercice 23

Exercice 27. Utilisez la méthode de variation des constantes pour le système associé à une équation du second ordre (preciser la démonstration évoquée cidessus). **Indication** on retrouvera la condition classique, souvent parachutée : $u'y_1 + v'y_2 = 0$; (utilisée dans exo 24) .

Chapitre 5

Compléments

Consulter le programme à la section 1.5

5.1 Existence de solution

Le théorème classique auquel se réfère le programme du CAPES (IV.3.a) (voir paragraphe 1.5) est celui de Cauchy-Lipschitz ; il est relatif à un problème de condition initiale (encore appelé problème de Cauchy) :

Definition 5.1.1. Problème de Cauchy :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \text{ et } x(t_0) = x_0 \tag{5.1.1}$$

Remarque 6. Rappelons que le problème de Cauchy est équivalent à une équaton intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds \tag{5.1.2}$$

Theorem 5.1.1. *(de Cauchy-Lipschitz) Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit*

$$f : U \longmapsto \mathbb{R}^n \tag{5.1.3}$$

$$(t,x) \longmapsto f(t,x) \tag{5.1.4}$$

une application continue de U dans E et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Alors il existe un intervalle $I =]t_0 - r, t_0 + r[$ dans lequel le problème de Cauchy admet une solution unique.

On trouvera une démonstration de ce théorème dans de nombreux livres (sa démonstration me parait à la limite du programme ; son contenu n'est demandé que pour $n = 1$) : voir par exemple [12].

Pour justifier le caractère lipschitzien d'une fonction, il suffit le plus souvent de montrer que *la dérivée est bornée !*(en utilisant le théorème des accroissements finis). C'est ainsi que $x \longmapsto x^2$ est localement lipschitzienne mais **pas** sur tout $\mathbb{R}$, ie pas globalement lipschitzienne ; voir exemples 2.2.1 et les exercices qui suivent.

Attention : ce théorème ne donne qu'une existence *locale* d'une solution.
$\rightarrow$ $\boxed{\text{Voir des exemples}}$ où la solution peut se calculer explicitement en section2.2. Il existe de nombreuses variantes ; on peut en particulier faire une hypothèse plus forte comme dans [21] et obtenir une existence **globale** :

Theorem 5.1.2. *Soit $t_1 < t_2$ et une application continue*

$$f : [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n \tag{5.1.5}$$

$$(t, x) \longmapsto f(t, x) \tag{5.1.6}$$

qui est globalement lipchitzienne par rapport à x :

$$\exists k > 0 \; \forall t \in [t_1, t_2], \forall x, y \in \mathbb{R}^n \; \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k\|x - y\| \tag{5.1.7}$$

alors pour tout t_0 dans $[t_1, t_2]$, et x_0 dans $\mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy admet une solution unique dans $[t_1, t_2]$.

Solution maximale

Definition 5.1.2. Une solution de 5.1.1 dans un intervalle I est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand.

On vérifiera :

Proposition 5.1.1. *Sous les hypothèses du théorème 5.1.1, il existe une solution maximale unique du problème de Cauchy*

Comme exemple voir section 2.2.1 et cet exercice.

Exercice 28.

1. Montrer que $x \longmapsto x^2$ n'est pas lipshitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Rappeler la solution du problème de Cauchy ; cette solution est-elle valide sur tout $\mathbb{R}$?
3. Solution maximale ?
4. Discutez le lien avec le théorème. (Si vous avez un malaise c'est normal)

Voici enfin des théorème plus élémentaire :

Theorem 5.1.3. *Mêmes hypothèses que le théorème 5.1.1 mais on remplace localement lipschitzienne par les dérivées partielles par rapport à la seconde variable sont continues, alors on a la même conclusion.*

En effet l'hypothèse de dérivées partielles continues entraine le caractère localement lipschitzien. (Voir le document calcul différentiel) On pourra consulter [11] pour démontrer une variante de ce théorème en exercice.

Enfin le paragraph IV 1a du programme cite ce théorème sans démonstration :

Theorem 5.1.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux applications continues $B : I \longmapsto \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$ et $A : I \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{C})$; on pose $f(t, x) = Ax + B$ Le problème de Cauchy admet une solution unique sur tout I.*

5.2 Utilisation de séries

Voir le document sur les séries : utilisation de séries entières et de séries de Fourier.

5.3 Inégalités

5.3.1 Lemme de Gronwall

De nombreuses variantes se trouvent dans la littérature; nous en proposons une très simple inspirée du cours d'analyse numérique polycopié de JL Lions [15].

Lemme 5.3.1.

$$\textit{Soit } \phi \in \mathcal{C}(0,T) \textit{ positive avec une constante } c \textit{ strictement positive} \tag{5.3.1}$$

$$\textit{et une fonction positive } m \textit{ et intégrable sur } [0,T]; \textit{supposons}: \tag{5.3.2}$$

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s)\phi(s)ds + c \quad \textit{alors} \tag{5.3.3}$$

$$\phi(t) \leq c\, exp\left(\int_0^t m(s)ds\right) \tag{5.3.4}$$

Remarque 7. Le second membre de 5.3.17 est la solution de

$$y(t) = c + \int_0^t m(s)y(s)ds$$

!voir paragraphe 4.2.

Démonstration. La démonstration s'inspire de celle utilisée pour les équations différentielles; nous proposons 2 variantes.

Variante 1 On remarque que l'hypothèse entraine :

$$\frac{m\phi}{\int_0^t m(s)\phi(s)ds + c} \leq m \text{ donc en intégrant} \tag{5.3.5}$$

$$\ln \frac{\int_0^t m(s)\phi(s)ds + c}{c} \leq \int_0^t m(s)ds \text{ d'où} \tag{5.3.6}$$

$$\int_0^t m(s)\phi(s)ds + c \leq c\, e^{\int_0^t m(s)ds} \tag{5.3.7}$$

d'où la majoration cherchée (5.3.17)

$$\tag{5.3.8}$$

Variante 2 Mais on peut aussi multiplier les 2 membres par

$$me^{-\int_0^t m(s)ds} \tag{5.3.9}$$

$$me^{-\int_0^t m(s)ds}\phi(t) \leq me^{-\int_0^t m(s)ds}\left(\int_0^t m(s)\phi(s)ds + c\right) \text{ alors} \tag{5.3.10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t m(s)ds}\left(\int_0^t m(s)\phi(s)ds + c\right)\right) \leq 0 \text{ d'où} \tag{5.3.11}$$

$$e^{-\int_0^t m(s)ds}\left(\int_0^t m(s)\phi(s)ds + c\right) \leq c \tag{5.3.12}$$

d'où encore la majortion cherchée (5.3.17)

$$\tag{5.3.13}$$

□

Une variante de la majoration (5.3.17) pour une approximation numérique permet de préciser la convergence de l'approximation, voir chapitre 3, paragraphe 3.1.

Exercice 29.

$$\text{Soit } \phi \in \mathcal{C}(0,T) \text{ positive avec une constante c strictement positive} \tag{5.3.14}$$

$$\text{et des constantes } \delta_1 \geq 0 \text{ ; } \delta_3 \geq 0 supposons : \tag{5.3.15}$$

$$\phi(t) \leq \delta_1 \int_0^t \phi(s)ds + c + \delta_3 t \quad \text{alors} \tag{5.3.16}$$

$$\phi(t) \leq (c + \frac{\delta_2}{\delta_1})\; exp\,(\delta_1 t) - \frac{\delta_2}{\delta_1} \tag{5.3.17}$$

sugestion : effectuer un changement de fonction inconue : $\phi = \psi - \frac{\delta_2}{\delta_1}$

Chapitre 6

Remarques sur des problèmes d'écrit

6.1 Problèmes d'Analyse

CAPES, analyse 96 : équations différentielles Il s'agit d'un problème à 2 points à ne pas confondre avec un problème de Cauchy. A la suite des devoirs rendus en décembre 2002, en dehors de la variation des constantes pour une équation du deuxième ordre et de la méconnaissance du théorème de Cauchy-Lipschitz pour le problème de Cauchy, les difficultés sont plutôt d'une autre nature : *changement de variable dans une équation différentielle : dérivation de fonctions composées, dérivaton d'une série de fonctions, série alternée* : je pense que c'est sur ces points que peuvent se décider admissibilité.

ENS Paris-Cachan 1998 sujet 1 : approximation EDP hyperbolique du 1er ordre

- Comme dans beaucoup de problèmes d'analyse, il faut *dériver des fonctions composées et dériver sous le signe somme ou par rapport à la borne.* Le théorème du programme complémentaire :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \phi(s,t)ds = \int_a^b \frac{\partial\phi(s,t)}{\partial t}ds \tag{6.1.1}$$

  il s'applique lorsque la dérivée partielle est continue par rapport aux deux variables.
- Ici, t intervient dans la borne ; on peut introduire :

$$g(\tau,t) = \int_a^\tau \phi(s,t)ds \tag{6.1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}g = \phi(\tau,t) \quad \text{et posons} \tag{6.1.3}$$

$$h(t) = g(t,t), \tag{6.1.4}$$

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial\tau}(t,t) + \frac{\partial g}{\partial t}(t,t) = \phi(t,t) + \int_a^t \frac{\partial\phi(s,t)}{\partial t}ds \tag{6.1.5}$$

– Difféomorphisme : ici c'est une fonction linéaire de 2 variables à valeurs dans $\mathbf{R}$, il est banal de l'inverser, ce qui montre la bijectivité ; la dérivéee est encore une application linéaire inversible et continue (une application linéaire en dimension finie est continue). Attention le théor 'me de la fontion inverse ne fournit que un difféomorphisme local !
– Il arrive souvent que la fonction $\phi(s,t) = \Phi(s,t,\xi(t,x))$; il faut alors noter que la dérivée de ϕ par rapport à t fait intervenir la dérivée de Φ par rapport à ξ car cette variable est fonction de t !
– Pour la question I.4, il sera plus facile de considérer d'abord le schéma Σ_1. Pour la suite il est conseillé de revoir le schéma d'Euler pour une équation différentielle : chapitre 3 ainis que les séries de Fourier.
– On utilise deux inégalités classiques : $1 + x \leq e^x$ et $2ab \leq a^2 + b^2$.

polytechnique 2002, filière PC C'est un problème sur le controle de systèmes régis par un système différentiel linéaire. Le problème commence par une question sur la définition d'une norme matricielle. A noter que les normes matricielles sont au programme du CAPES ; on pouvait donc considerer que les questions etaient du cours ; sinon il convenait d'y répondre sans erreur ! Mais beaucoup d'erreurs dont :
– on n'a pas

$$\|MNx\| \leq \|Mx\|\|Nx\| \tag{6.1.6}$$

$$\|MxNx\| \text{ n a pas de sens!} \tag{6.1.7}$$

$$\|\sum_{k=m+1}^{n} M^k\| \text{en général n'est pas borné uniformément en } m,n \tag{6.1.8}$$

– attention á la dérivation de séries ! !

equation diff 2nd ordre c'est un CAPEs blanc proposé à l'IUFM de la Guadeloupe en 2001-02 ; on peut le trouver avec une correction proposée : http ://perso.wanadoo.fr/megamaths/anndi.html Voici quelques commentaires.

6.2 Problème d'algèbre

Capes agricole 2002 Dans ce problème, on étudie des propriétes de l'opérateur $\Delta P = P(X+1) - P(X)$ où P est un polynome. Cet opérateur Δ joue un peu le rôle de la dérivée usuelle et l'on étudie une base adaptée à cet opérateur qui joue un rôle analogue à $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ pour la dérivée. Il est commode de se rappeler que des polynomes de degrés tous différents de zéro à n forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degrés n.

Exercice 30. Démontrer l'affirmation précédente en utilisant les monômes de plus haut degrés.

Chapitre 7

Remarques sur des leçons

69 (66 en 2004) : Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utiilisation d'une calculatrice

Dans les prérequis, on pourra indiquer : convergence de suite monotone, Taylor-Lagrange, théorème des valeurs intermédiaires, théorème du point fixe. On peut citer les 3 méthodes de dichotomie, Lagrange (ou sécante) et Newton. Il convient de comparer les méthodes du point de vue de la robustesse et de la rapidité de convergence ; il est bon de savoir dessiner un contre-exemple graphique montrant la divergence de Newton. Il est souhaitable de comparer Lagrange et Newton : pour une fonction convexe, les 2 suites encadrent la solution ; en approchant la dérivée par un quotient différentiel, Newton s'approche par Lagrange. Ne pas négliger la méthode du **point fixe** qui a de nombreux avantages :

– les suites récurentes sont bien connues et peuvent être facilement calculées avec une calculette ;
– elle constitue aussi une méthode de démonstration d'existence de solution pour des équations très variées (é quations différentielles...) ;
– elle est d'application très générale.

84 (86 en 2002), (69 en 2004) : caractérisation de la fonction exponentielle réelle par l'équation différentielle $y' = ay$ et une condition initiale. Applications.

Depuis le concours 2002, je pense que l'on ne peut pas faire l'économie du document [2]. En particulier, on ne peut pas négliger que l'exponentielle est introduite avec l'équation différentielle. Ne pas oublier :

– introduire le schéma d'Euler pour approcher l'équation diférentielle ;
– par un changement de fonction présenter une équation non linéaire se ramenant à une équation linéaire (exemple bac 2003 TS) ;
– expliquer la terminologie linéaire : prendre un second membre de la forme $g = g_1 + g_2$;
– si vous désignez par f la solution de l'équation différentielle $y' = ay + g$, soignez la formulation pour rester intéligible ! (je déconseille cet usage).

85 (87 en 2002), (81 en 2004) : Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans seconds membres. Exemples

Dès l'introduction on peut indiquer oralement des motivations physiques de ces équations différentielles ; noter que seuls des exemples sont à présenter en Terminale depuis l'année 02-03. Ne pas oublier :

– Indiquer ce que linéaire veut dire : les combinaisons linéaires de solutions sont encore solutions.
– l' équation caractéristique est liée à la recherche de solution sous forme exponentielle
– Dessiner la solution en particulier pour les oscilations amorties.
– Dans les exemples préciser la signification physique des données de Cauchy
– Il convient de savoir rappeler les lois physiques à l'origine des équations différentielles (exemple : $F = m\gamma$ pour la mécanique, propriétés des dipoles en électricité ; on trouvera quelques éléments au paragraphe : 4.3)

85 en 2005, Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illusté par un ou dese exmplesfaisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

– Il convient de relier cette méthode à l'interprétation géométrique d'une équation différentielle avec la tangente à la courbe ; il convient d'indiquer que en mode équation différentielle, les calculettes tracent les champs de vecteurs tangents : $t_k, x_k, f(t_k, x_k)$
– Justifier la convergence de la méthode d'Euler relève du programme complémentaire (voir chapitre 3) ; toutefois, il est du niveau T. S. de montrer sa convergence pour l'équation différentielle $x' = x$; on pourra s'inspirer des documents d'accompagnements de T.S., annexe sur la radioactivité, ([2]) : plus précisément : introduire : $u_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ (méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle) et $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$; on montrera que $u_n \leq v_n$ et que u_n est croissante et v_n décroissante ; d'où la convergence. Pour montrer que u_n est croissante, remarquer que $u_{n+1} = (1 + \frac{x}{n} + \frac{x}{n+1} - \frac{x}{n})^{n+1} = u_n(x)(1 + \frac{x}{n})(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})})^{n+1}$; pour conclure, utiliser : pour $u > -1$, $(i + u)^n \leq 1 + nu$
– Il faut montrer sur des exemples, la convergence de la solution approchée, en comparant pour une valeur donnée de t, des valeurs de la solution approchée pour $h \to 0$ avec $h = \frac{T}{n}$ et $n \to \infty$; d'autre part, on pourra utiliser $x' = ax$ avec a petit, pour mettre en évidence la mauvaise convergence : pour $h = \frac{t}{n}$, $\quad \xi_n = (1 + \frac{at}{n})^n$ qui tend très lentement vers e^{at} quand par exemple $a = 1/1000$.
– Il vaut mieux présenter au moins un exemple avec une équation différentielle non linéaire ; si l'on n'a pas de solution exacte, vérifier expérimentalement la convergence à t fixé.
– Pour répondre aux questions, il est bien de savoir que la convergence de l'approximation se démontre avec f lipschitzienne par raport à x, voir chapitre 3.

Bibliographie

[1]

[2] Documents d' accompagnements des programmes de mathématiques de lycée. Site internet,http ://www.cndp.fr/lycee/maths.

[3] V. Arnold. *Equations différentielles ordinaires.* MIR, 1988.

[4] Divers auteurs. Formation continue ; ressources des ens. http ://www.eduscol.education.fr/ens/.

[5] ... Beltramone. *Maths, Terminale S.* Declic. Hachette Education, 2002.

[6] J. Chevallet, editor. *Les mathématique de CAPES, problèmes corrigés posés l'écrit du concours avec les rapports du jury.* Vuibert, 200 ?

[7] J.P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* Collection Grenoble Sciences. PUG, 1991.

[8] Donedu. *Cours de mathématiques spéciales.* Vuibert.

[9] Lemberg Richard Dufetel, Lacroix-Sonrier. *Epreuve écrite du CAPES : cours et exercices résolus.* Vuibert, 200 ?

[10] J.A. Dieudonné. *Calcul infinitésimal.* Hermann, 1968.

[11] F. Rouvière. *Petit précis de calcul différentiel.* Cassini, 1999.

[12] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudies. *Cours de mathématiques*, volume 4. Dunod, 1977.

[13] R. Ferrachoglou et Ph. Terracher. *Maths, Terminale S.* Terracher. Hachette Education, 2002.

[14] Thiery Lambre. *Epreuve sur dossier, oral du CAPES de mathématiques.* Ellipses, 1998.

[15] J.L. Lions. Cours d'analyse numérique. polycopié, Paris : Ecole polytechnique, 1970.

[16] DJA Mercier. http ://perso.wanadoo.fr/megamaths/.

[17] ... Misset. *Maths, Terminale ES.* Declic. Hachette Education, 2002.

[18] J. M. Monier. *Mathématiques pour le DEUG.*

[19] B. Perrin. Wims paris-sud. http ://wims.auto.u-psud.fr/.

[20] F. Pham. *Les différentielles.* Masson, 1996.

[21] M. Schatzman. *Analyse numérique. cours et exercices pour la licence.* Interéditions, 1991.

[22] Ressources scientifiques pour les enseignants de mathématiques. http ://www.dma.ens.fr/culturemath/.

[23] Université en ligne. Site internet, http ://www.uel-pcsm.education.fr.

[24] G. Xiao. Wims. http ://wims.unice.fr.

[25] B. Ycart. Systèmes différentiels. http ://www.math-info.univ-paris5.fr/ ycart/polys/polys.html.

Index