Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 2, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Conséquence de Hahn-Banach)

Soit E un espace vectoriel normé réel. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max_{f \in E',\, \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)|.$$

Exercice 2 (Théorème de Krein-Milman)

Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^N\,;\, |x_i| \leq 1, \forall i\}$ et $C = \{y \in \mathbb{R}^N\,;\, |y_i| = 1, \forall i\}$. Montrer que $D = \overline{\mathrm{Conv}(C)}$. (On pourra commencer par montrer que

$$f(x) \leq \sup_{y \in C} f(y),\ \forall f \in (\mathbb{R}^n)' \ \Rightarrow\ x \in \overline{\mathrm{Conv}(C)}.)$$

Exercice 3 (Ensemble de continuité)

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts.

(Utiliser $\Omega_n = \{x\,;\, \exists V$ vois. de x tel que $\forall y, z \in V,\ |f(y) - f(z)| < 1/n\}$.)

En déduire qu'il n'existe pas de fonctions continues sur $\mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Donner par contre l'exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 (Théorème du graphe fermé)

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \mapsto F$ linéaire. On définit le graphe de T par

$$Gr(T) = \{(x, T(x))\,;\, x \in E\}.$$

Montrer que si $Gr(T)$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continue. (On pourra utiliser les projections du graphe sur E et F).

Application : Soit E un espace de Banach et F un s.e.v. fermé de E. Alors il existe une projection linéaire continue P de E sur F si et seulement si il existe un s.e.v. fermé G de E tel que $E = F \oplus G$.

Exercice 5 (Limite d'opérateurs)

Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continus d'un espace de Banach E dans un Banach F tels que, pour tout $x \in E$, la suite $\big(T_n(x)\big)$ est convergente. Démontrer que l'application T de E dans F définie par $T(x) = \lim_{n \to +\infty} T_n(x)$ est linéaire et continue.

Exercice 6 (l^p et son dual)

Soit $p \in]1, +\infty[$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N})$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est convergente. Montrer que $u \in l^q(\mathbb{N})$ où $1/p + 1/q = 1$.

Exercice 7 (Continuité et dimension finie)

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit F un sous espace vectoriel fermé de E tel que toute fonction de F est de classe C^1.

(1) Montrer que $T : f \mapsto f'$ de F dans E est continue.
(2) Montrer que la boule unité fermée de F est équicontinue.
(3) En déduire que F est de dimension finie.