Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 4, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Calculs de séries de Fourier)

Calculer les séries de Fourier associées aux fonctions 2π périodiques suivantes :

1) $\sigma_\varepsilon(x) = 1$ pour $|x| \leq \varepsilon$ et 0 pour $\varepsilon < |x| \leq \pi$ où $\varepsilon \in]0, \pi[$.

2) $f(x) = \pi - x$ pour $0 < x \leq \pi$ et f impaire.

Exercice 2 (Noyau de Dirichlet)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique. On note dans ce cas

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

On définit le noyau de Dirichlet selon

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n, \quad e_n(x) = e^{inx}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$

Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(t) \, dt = 1, \quad D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}, \quad f * D_N = S_N(f),$$

où on a posé

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n,$$

et où la convolution est définie par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y) \, dy.$$

Exercice 3 (Théorème de Féjer)

On définit le noyau de Féjer selon

$$K_N = \frac{1}{N} \left(D_0 + \cdots + D_{N-1} \right).$$

On pose également

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \left(S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f) \right).$$

1) Montrer que

$$K_N = \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N}) e_n, \quad K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

$$\|K_N\|_1 = 1, \quad \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} K_N(x) \, dx = 0 \text{ pour tout } 0 < \delta < \pi,$$

$$\sigma_N(f) = (f * K_N) = \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N}) c_n(f) e_n.$$

2) Montrer que pour $f \in E$, on a

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0.$$

3) Montrer que si $f \in L^p(]0,2\pi[)$ et 2π périodique, alors

$$\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p, \quad \lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0.$$

4) Montrer que si f est 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f. (On commencera par remarquer que $c_n(f') = inc_n(f)$.)

Exercice 4 (Fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier)

On note E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π périodique muni de la norme infini.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme linéaire

$$L_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f).$$

(1) Montrer que cette forme linéaire est continue et montrer que sa norme vaut

$$\|L_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right| dt.$$

(2) En déduire qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas somme de leur série de Fourier.

Exercice 5 (Application à la résolution de l'équation de la chaleur)

Les séries de Fourier ont été introduites par Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur. On cherche, connaissant la température d'une barre métallique à l'instant initial en tout point et aux deux extrémités en tout temps, à déterminer la température $u(t,x)$ de la barre en tout temps et en tout point. On doit pour cela résoudre l'équation aux dérivées partielles avec les conditions aux limites et initiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ sur }]0,L[\times]0,+\infty[,$$
$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad u(0,x) = h(x),$$

où $h \in C^1(]0,L[) \cap C^0([0,L])$ vérifie $h(0) = h(L) = 0$.

Indication : En cherchant u sous la forme $u(t,x) = f(x)g(t)$, montrer que l'on peut chercher une solution sous la forme

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin(n\pi x/L) e^{-n^2\pi^2 t/L^2}.$$

On précisera ce que représente les a_n et on en déduira une solution du problème.