Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 5, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Linéarisé)

Etudier le comportement de (u, v) solution de

$$u' = \lambda u, \qquad v' = \mu v,$$

dans les cas suivants :
a) $\lambda, \mu < 0$, b) $\lambda < 0 < \mu$, c) $\lambda, \mu > 0$, d) $Re(\lambda) = Re(\mu) < 0$, e) $Re(\lambda) = Re(\mu) > 0$.

Exercice 2 (Phénomène de résonance)

Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ le problème de Cauchy

$$y'' + \lambda y = f,$$

avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, où f est une fonction continue et λ un réel strictement positif. Ecrire la solution explicite pour $f(x) = \cos(\omega x)$. Que peut-on dire sur le caractère bornée de la solution ?

Exercice 3 (Lemme de Gronwall)

Soit u, v des fonctions continues sur $[0, T]$ avec $v \geq 0$. On suppose que

$$u(t) \leq a + \int_0^t u(s)v(s)\,ds,$$

montrer que

$$u(t) \leq a e^{\int_0^t v(s)\,ds}.$$

Exercice 4 (Solutions maximales)

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz k.
1) Montrer qu'il existe une unique solution maximale.
2) Montrer que cette solution vérifie

$$|y(t) - y_0| \leq |t||f(y_0)|e^{k|t|},$$

pour tout t dans l'intervalle maximal.
3) Montrer que la solution maximale est globale.

Exercice 5 (Equation d'ordre 2)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $p, q \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Montrer que toute solution non nulle a un nombre fini de zéro sur tout intervalle fermé borné de I.

Exercice 6 (Portrait de phase)

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Tracer le portrait de phase des solutions (suivant les valeurs de la donnée de Cauchy).

Exercice 7 (Pendule sans frottement)

1) On considère un pendule constitué d'une petite bille de masse m fixée au bout d'une tige rigide de longueur l, elle-même attachée en son autre extrémité à un point O et libre de se mouvoir dans un plan vertical (faire une figure représentant le système). La bille peut donc se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon l.

La position de la bille est repérée par l'angle balayé depuis sa position d'équilibre, noté θ. Les forces qui s'exercent sur la bille sont la force de gravité $m\vec{g}$ et la force de réaction de la tige (dirigée selon la direction de la tige elle-même).

Appliquer la loi de Newton pour obtenir l'équation différentielle régissant le mouvement de la bille :

$$l\theta'' = -g \sin\theta,$$

où g est le module de $\vec{g}$.

2) On considère maintenant le système équivalent

$$\begin{cases} \theta' = z, \\ z' = -K \sin\theta, \end{cases}$$

où l'on a posé $K = g/l$.

Montrer que la quantité $E(\theta, z) = z^2/2 - K\cos\theta$ est invariante au cours du temps.

3) Identifier les points d'équilibre du système. Représenter les lignes de niveau de la fonction $E(\theta, z)$ pour $-5\pi \leq \theta \leq 5\pi$.

4) Décrire le mouvement du pendule correspondant aux divers types de trajectoires identifiés.