Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,

Leçon d'Oral 229, Année 2006-2007

Fonctions monotones. Fonctiones convexes. Exemples et applications.

Remarques sur la leçon

Donner les définitions, les caractérisations les plus utiles en pratique.

Donner les résultats de régularité : continuité, points de discontinuité, lien avec dérivées, dérivée à gauche,...

Quelles propriétés sont conservées dans les suites de fonctions,...

Ne pas oublier les inégalités de convexité : moyenne arithmético-géométrique, Jensen, Minkowski, Hölder ($->$ normes sur $\mathbb{R}^n$).

Parler de comparaison série-intégrale et de ses conséquences.

Traiter les fonctions à variations bornées ce qui permet de faire un beau développement.

Ne pas oublier la fonction Γ afin que les exemples ne soient pas tous “triviaux”.

On peut aussi mettre le théorème de John.

Exercices type oral

1) Soit $x_i > 0$. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

2) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ quand $n \to +\infty$.

3) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe bornée. Montrer que f est décroissante.

4) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$ pour tout $x, y \in [a, b]$. Montrer que f est convexe.