SYSTEME PROIE/PREDATEUR de LOTKA-VOLTERRA.

On considère le système proie-prédateur de Lotka-Volterra

$$(\mathcal{LV}) \quad \begin{cases} x'(t) &= \quad ax(t) - bx(t)y(t) \\ \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

Les nombres a, b, c et d sont des constantes réelles strictement positives. Les quantités $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement le nombre de requins et de sardines (par exemple) dans une étendue d'eau. On regardera donc les solutions qui sont toujours positives (éventuellement s'annulant). Le système étant autonome, on peut se donner la condition initiale

$$\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, y_0).$$

1) Théorème de Cauchy-Lipschitz. Ecrire le système sous la forme $Y(t) = f(t, Y(t))$, où $Y(t) = {}^t\big(x(t), y(t)\big)$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est à préciser. Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont-elles satisfaites ? Qu'en déduire ? On note (x, y) une solution maximale de $(\mathcal{LV})$ définie sur un intervalle (ouvert) I.

2) Solutions particulières. *a)* Déterminer les solutions de $(\mathcal{LV})$ constantes $\big(x(t), y(t)\big) \equiv (X, Y)$ (on ne gardera que les positives). On pose désormais $\bar{x} = \frac{c}{d}$ et $\bar{y} = \frac{a}{b}$.

b) On suppose $x_0 = 0$. Déterminer alors une solution de $(\mathcal{LV})$ du type $Y(t) = \big(0, y(t)\big)$. Est-ce que c'est *la* solution au problème ? En déduire que si $x_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ pour $t \in I$. Même question lorsque $y_0 = 0$.

On n'envisage dans la suite que des solutions (x, y) de $(\mathcal{LV})$ avec $x > 0$ et $y > 0$.

3) Intégrale première, existence globale. On définit la fonction $H : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$H(x, y) = dx - c\ln x + by - a\ln y.$$

a) Vérifier que si (x, y) est solution sur I de $(\mathcal{LV})$, alors la fonction $I \ni t \mapsto H\big(x(t), y(t)\big)$ est constante.

b) Montrer que $\mathbb{R}_+^* \ni t \mapsto dx - c\ln x$ est convexe, minorée, et tend vers $+\infty$ si $x \to +\infty$; la dessiner rapidement. En déduire que si $h \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ H(x, y) = h\big\}$ est borné (compact). Démontrer alors que toute solution maximale de $(\mathcal{LV})$ est globale, *i.e.* définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4) Modélisation Vérifier que $(\mathcal{LV})$ est un modèle où le nombre de naissances à l'instant t pour les sardines est proportionnel à $x(t)$, et que le nombre de sardines mangées par les requins est proportionnel à $x(t)$ et $y(t)$. Trouver le modèle pour les requins.

5) Linéarisation *a)* Déterminer le linéarisé de $(\mathcal{LV})$ autour de la solution stationnaire $(0,0)$, ainsi que les valeurs propres de la matrice associée. Qu'en déduire sur la stabilité de la solution stationnaire $(0,0)$?

b) Même question pour la solution stationnaire $(\bar{x},\bar{y})$. Que peut-on en déduire ?

c) La fonction H est-elle une fonction de Lyapounov pour notre problème ? Qu'en déduire sur la stabilité de la solution stationnaire $(\bar{x},\bar{y})$?

6) Périodicité des solutions. On définit dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, les domaines

$$A =]\bar{x},+\infty[\times]\bar{y},+\infty[, \quad B =]0,\bar{x}[\times]\bar{y},+\infty[, \quad C =]0,\bar{x}[\times]0,\bar{y}[\quad D =]\bar{x},+\infty[\times]0,\bar{y}[,$$

ainsi que

$$\Gamma_{AB} = \{\bar{x}\}\times]\bar{y},+\infty[, \quad \Gamma_{BC} =]0,\bar{x}[\times\{\bar{y}\}, \quad \Gamma_{CD} = \{\bar{x}\}\times]0,\bar{y}[, \quad \Gamma_{DA} =]\bar{x},+\infty[\times\{\bar{y}\}.$$

Soit (x,y) une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{LV})$, avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, $(x_0,y_0) \neq (\bar{x},\bar{y})$.

a) Déterminer le signe de x' et de y' lorsque (x,y) est dans les domaines A, B, C et D.

b) On suppose $(x_0,y_0) \in A$. Montrer qu'il existe $t_{AB} > 0$ tel que $(x(t),y(t) \in \Gamma_{AB}$. On pourra pour cela vérifier que l'ensemble $\{T \geq 0, (x,y) \in A \text{ sur } [0,T]\}$ est un intervalle ouvert du type $[0,t_{AB}[$, avec $t_{AB} \in \mathbb{R}_+^*$ ou $t_{AB} = +\infty$. Pour exclure $t_{AB} = +\infty$, montrer que $x'(t) \leq b\bar{x}(\bar{y} - y_0) < 0$ pour $0 \leq t < t_{AB}$ et que x est minoré.

c) Montrer que si $(x_0,y_0) \in \Gamma_{AB}$, alors pour $t > 0$ assez petit, $\big(x(t),y(t)\big) \in A$.

d) Démontrer que (x,y) est une fonction périodique. On montrera en utilisant H que si $t < t'$ sont tels que $y(t) = y(t')$ et $x(t)$, $x(t') \geq \bar{x}$, alors $x(t) = x(t')$.

7) Valeurs moyennes & effet de la pêche. *a)* En intégrant $\frac{x'}{x}$ sur une période T, montrer que

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ dt = \bar{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\ dt = \bar{y}.$$

Remarquer que ceci ne dépend pas de la solution considérée.

b) Si on prend en compte la pêche en modifiant $(\mathcal{LV})$ en

$$(\mathcal{LV}') \quad \begin{cases} x'(t) &= \quad ax(t) - bx(t)y(t) - ex(t) \\ \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) - fy(t), \end{cases}$$

avec e et f constantes strictement positives, vérifier que l'on obtient un nouveau système de Lotka-Volterra, de coefficients a', b', c' et d' à déterminer. Calculer les nouvelles valeurs moyennes de x et y pour ce système : que déduire de l'effet de la pêche sur la population moyenne de sardine ? et de requin ?

Références :

- A. Chambert-Loir & Cie, Vol. 3, *Ex 30-10* p. 137.
- Hubard & West. *Equations différentielles et systèmes dynamiques.* Cassini.