Assimilation de données expérimentales dans les systèmes non-linéaires chaotiques

Didier AUROUX

Stage de 1ère année sous la direction de Jacques Blum et Eric Blayo

Laboratoire de Modélisation et Calcul
Université Joseph Fourier - Grenoble

Juin - Juillet 1998

1 Introduction

La météorologie et l'océanographie sont souvent confrontées à l'étude de systèmes non-linéaires dont le comportement est chaotique et qui possèdent des attracteurs. Un des problèmes actuels est de prédire le comportement de ces systèmes (*exemple* : prévisions météo). Or la qualité de ces prévisions dépend largement de l'estimation de l'état initial à partir duquel sera calculée l'évolution future. La reconstitution de cet état initial peut être réalisée en utilisant les observations disponibles grâce à des techniques d'assimilation de données.

Toutefois, l'efficacité de l'assimilation de données est limitée par l'aspect chaotique du système puisque la moindre erreur dans les observations peut entraîner des prévisions erronées.

Il y a principalement deux types de méthodes d'assimilation de données :

- l'assimilation séquentielle : le modèle est intégré dans le temps sur toute la période d'assimilation par une méthode du type prédicteur-correcteur, et à chaque nouvelle observation le modèle est corrigé à l'aide des nouvelles données. Ces algorithmes d'assimilation reposent sur le principe du filtre de Kalman.
- l'assimilation variationnelle : il s'agit de calculer la meilleure estimation possible de l'état présent, grâce à une minimisation explicite de la fonctionnelle qui mesure l'écart (au sens des moindres carrés) entre les observations et les états estimés du système.

Nous nous limitons ici au cas de l'assimilation variationnelle. De nombreux problèmes se posent lorsque la période d'assimilation est grande, car la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser a de très nombreux minima locaux, et comme nous le verrons, il est important de trouver le minimum absolu.

Nous considérons ici une situation idéalisée où l'on suppose :

- que le modèle est parfait, c'est-à-dire qu'on connaît les équations exactes d'évolution du système dynamique,
- et que des observations de l'état complet du système sont disponibles à intervalles réguliers de temps, sur une période arbitrairement longue dans le passé.

Les principales questions qui se posent alors sont : connaître la précision des estimations, savoir quelle est l'information contenue dans les observations passées, comment trouver du point de vue pratique le minimum absolu de la fonction de coût, et quel est son intérêt par rapport à un autre minimum.

2 Définition et comportement de la fonction de coût dans les systèmes chaotiques

2.1 Définitions

On considère un système dynamique dont l'état à l'instant t est représenté par le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^m$, et dont l'évolution dans le temps est donnée par un système d'équations de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x). \tag{1}$$

On suppose que des observations $\tilde{x}(t_i)$ ont été réalisées à intervalles de temps réguliers δt ($t_i = -i\delta t$, $t = 0$ correspondant au temps présent), et qu'il existe une erreur d'observation $\varepsilon(t_i) = \tilde{x}(t_i) - x(t_i)$ (supposée aléatoire, indépendante du temps et des observations, et isotrope avec une variance σ^2 dans chaque direction) entre les observations et les états réels du système aux mêmes instants. On considère l'assimilation des $N+1$ dernières données, correspondant à une période d'assimilation de longueur $\tau = N\delta t$.

Si on se donne une solution $\hat{x}(t)$ de (1), on peut définir une fonctionnelle

$$J(\tau, \hat{x}(0), x(0)) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \|\hat{x}(t_i) - x(t_i) - \varepsilon(t_i)\|^2 \tag{2}$$

qui mesure l'écart entre la solution $\hat{x}(t)$ et les observations $\tilde{x}(t_i) = x(t_i) + \varepsilon(t_i)$. Le principe de l'assimilation variationnelle est de trouver la solution $\hat{x}(t)$ de (1) qui minimise J. Le système étant supposé déterministe, on peut considérer que J ne dépend que des états $\hat{x}(0)$ et $x(0)$ au temps présent.

On peut également considérer que la fonctionnelle ne dépend que des vecteurs d'état réel $x(t_N)$ et estimé $\hat{x}(t_N)$ au temps initial de la période d'assimilation :

$$J'(\tau, \hat{x}(t_N), x(t_N)) = J(\tau, \hat{x}(0), x(0)). \tag{3}$$

La fonctionnelle J' définie par (3) est dite directe par opposition à J qui est dite rétrograde. L'intégration rétrograde de systèmes dissipatifs étant très coûteuse et compliquée (les erreurs numériques sont fortement amplifiées à chaque pas de calcul, ce qui entraîne une divergence des calculs), les algorithmes d'assimilation sont généralement implémentés avec la fonctionnelle directe J'.

Dans la suite, on notera abusivement x et $\hat{x}$ respectivement les vecteurs d'état réel $x(0)$ et estimé $\hat{x}(0)$.

On peut décomposer l'équation (2) en

$$\begin{aligned} J(\tau, \hat{x}, x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \|\hat{x}(t_i) - x(t_i)\|^2 + \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \|\varepsilon(t_i)\|^2 \\ &- \frac{2}{N+1} \sum_{i=0}^{N} \langle \hat{x}(t_i) - x(t_i), \varepsilon(t_i) \rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

Le premier terme, noté $J_e(\tau, \hat{x}, x)$, est la fonctionnelle que l'on obtiendrait en absence d'erreurs d'observation. Le deuxième terme tend, lorsque $\tau \to \infty$, vers la variance totale de l'erreur d'observation, $E^2 = m\sigma^2$, et le troisième terme tend vers 0 puisqu'on a supposé que les erreurs d'observation sont indépendantes des vecteurs d'état. Ainsi, pour de grandes valeurs de N, les variations et les minima de J et J_e sont les mêmes.

J_e mesure l'écart entre deux solutions du modèle, $x(t)$ et $\hat{x}(t)$. En général, deux solutions du modèle ne peuvent pas rester proches l'une de l'autre dans le passé lointain, même si elles sont voisines dans le présent. Cependant, cela arrive parfois, ce qui nous conduit à introduire la *variété instable* $W_u(x)$ au point $x = x(0)$ comme étant l'ensemble des vecteurs $\hat{x} = \hat{x}(0)$ qui vérifient :

$$\hat{x} \in W_u(x) \Leftrightarrow \lim_{t \to -\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0 \tag{5.a}$$

On peut définir de manière analogue la *variété stable* $W_s(x)$:

$$\hat{x} \in W_s(x) \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0 \tag{5.b}$$

La fonctionnelle J_e a un comportement particulier vis-à-vis de ces variétés puisqu'elle a tendance (au fur et à mesure qu'on augmente τ) à s'annuler le long de la variété instable, alors qu'elle peut tendre vers l'infini ailleurs. De même, la fonctionnelle avec erreur J va donc tendre vers E^2 sur la variété instable. De façon duale, on peut remplacer la fonctionnelle rétrograde J par la fonctionnelle directe J' en inversant variété instable et variété stable. Donc lorsque la période d'assimilation est étendue dans le passé et dans le futur, le minimum absolu de la fonctionnelle converge vers le vecteur d'état réel x. Ceci a de nombreuses conséquences dans la réanalyse des observations passées.

2.2 Calcul des variétés stable et instable

Le calcul des équations des variétés stable et instable en un point donné repose sur la méthode de Breeding. Son principe est le suivant :

- Ajouter une petite perturbation arbitraire ε_0 au champ de contrôle $x(t_0)$ résultant d'une simulation donnée pour obtenir un champ perturbé $x_\varepsilon(t_0)$,
- intégrer le modèle à partir du contrôle (non perturbé) $(x(t_0))$ et à partir de la condition initiale perturbée $(x_\varepsilon(t_0))$ pendant une période de durée T (de $t = t_0$ à $t_0 + T$),
- soustraire l'état du contrôle à la fin de la période d'intégration $x(t_0 + T)$ à l'état perturbé au même instant $x_\varepsilon(t_0 + T)$,
- renormaliser la différence obtenue de sorte qu'elle ait la même norme que la perturbation initiale: $\varepsilon_1 = \|\varepsilon_0\| \cdot \frac{x_\varepsilon(t_0+T) - x(t_0+T)}{\|x_\varepsilon(t_0+T) - x(t_0+T)\|}$.

On ajoute alors cette nouvelle perturbation ε_1 à l'état final du champ non perturbé $x(t_0 + T)$ et on recommence de $t_0 + T$ à $t_0 + 2T$ ...

Cette méthode permet de ne conserver que les modes qui croissent le plus rapidement lors de l'intégration du système. Ainsi, après avoir appliqué la méthode de Breeding p fois (p suffisamment grand), la direction de la perturbation finale ε_p est la direction de la variété instable $W_u(x(t_0 + pT))$ du système au point $x(t_0 + pT)$.

Remarques :

- On peut trouver de la même manière la variété stable en remplaçant les intégrations directes par des intégrations rétrogrades.
- Une manière analogue de trouver ces variétés consiste à intégrer le système linéaire tangent au point considéré en partant d'une petite perturbation arbitraire et en renormalisant périodiquement le vecteur résultant de l'intégration (de sorte que le système n'explose pas). La variété cherchée a la direction du vecteur obtenu à la fin de l'intégration.

2.3 Comportement de la fonctionnelle dans le cas du système de Lorenz

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre du système de Lorenz, exemple type de système dynamique très chaotique. Le système de Lorenz est un jeu de trois équations

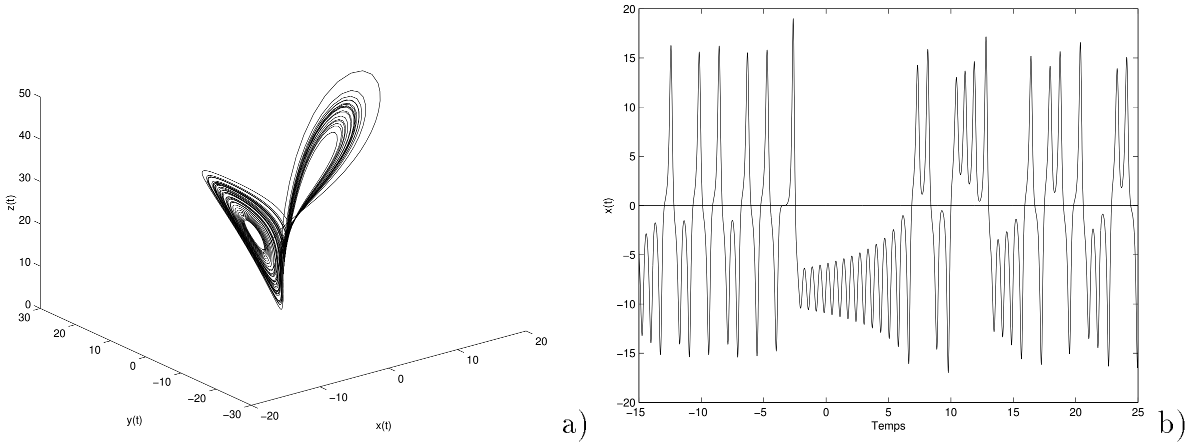

FIG. 1: (a) Evolution dans le temps du vecteur d'état (x, y, z) du système de Lorenz. (b) Variations de la variable $x(t)$ pour les mêmes conditions initiales.

différentielles non-linéaires couplées faisant intervenir les trois variables $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \rho x - y - xz, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\beta z + xy. \end{array} \right. \tag{6}$$

On choisit dans la suite les valeurs des paramètres : $\sigma = 10, \rho = 28$ et $\beta = \frac{8}{3}$. La figure 1.a montre l'évolution du vecteur $(x(t), y(t), z(t))$ sur l'intervalle de temps $(-15, 25)$, obtenue en intégrant le système de Lorenz à partir de la condition initiale $(-4.62, -6.61, 17.94)$ au temps $t = -15$. La figure 1.b correspond à l'évolution de la variable $x(t)$ à partir des mêmes conditions initiales. Les deux régimes du système de Lorenz correspondent à des oscillations autour de deux points fixes instables du système, symétriques par rapport à l'axe $x = y = 0$. Les oscillations autour de chacun des points fixes, pendant lesquelles la variable x garde un signe constant, sont clairement visibles sur la figure 1, et ont une période de l'ordre de 1. Leur amplitude augmente progressivement, et après quelques oscillations, une transition a lieu vers l'autre point fixe. Les transitions correspondent à un changement de signe de x.

On s'intéresse maintenant à la fonctionnelle J'_e le long des variétés stable et instable. Dans la suite, le point de référence pour le calcul des directions des variét'es est (-7.9440, -5.3645, 29.4994) (état du système de Lorenz au temps $t = 0$ dans les conditions de la figure 1). En utilisant la méthode de Breeding de $t = -2$ à $t = 0$ en renormalisant tous les 0.2, on a trouvé l'équation de la variété instable (de dimension 2 ici), et de manière analogue, en utilisant la méthode de Breeding de $t = 0.4$ à $t = 0$ (intégrations rétrogrades), la variété stable a également été déterminée (elle est de dimension 1). La figure 2 montre les variations de $J'_e(\tau, \hat{x}, x)$ le long des variétés : la figure 2.a correspond à la variété stable (de dimension 1) pour $\tau = 6$; 7 et 8, les figures 2.b et 2.c montrent les variations de la fonctionnelle J'_e le long de deux directions orthogonales de la variété instable du système pour $\tau \in \{6; 7; 8\}$ et $\tau \in \{6; 7; 8; 9\}$ respectivement. On constate la différence d'échelle (de l'ordre de 100) entre les valeurs de la fonctionnelle le long de la variété stable et sur la variété instable. On voit également qu'à chaque fois que la période

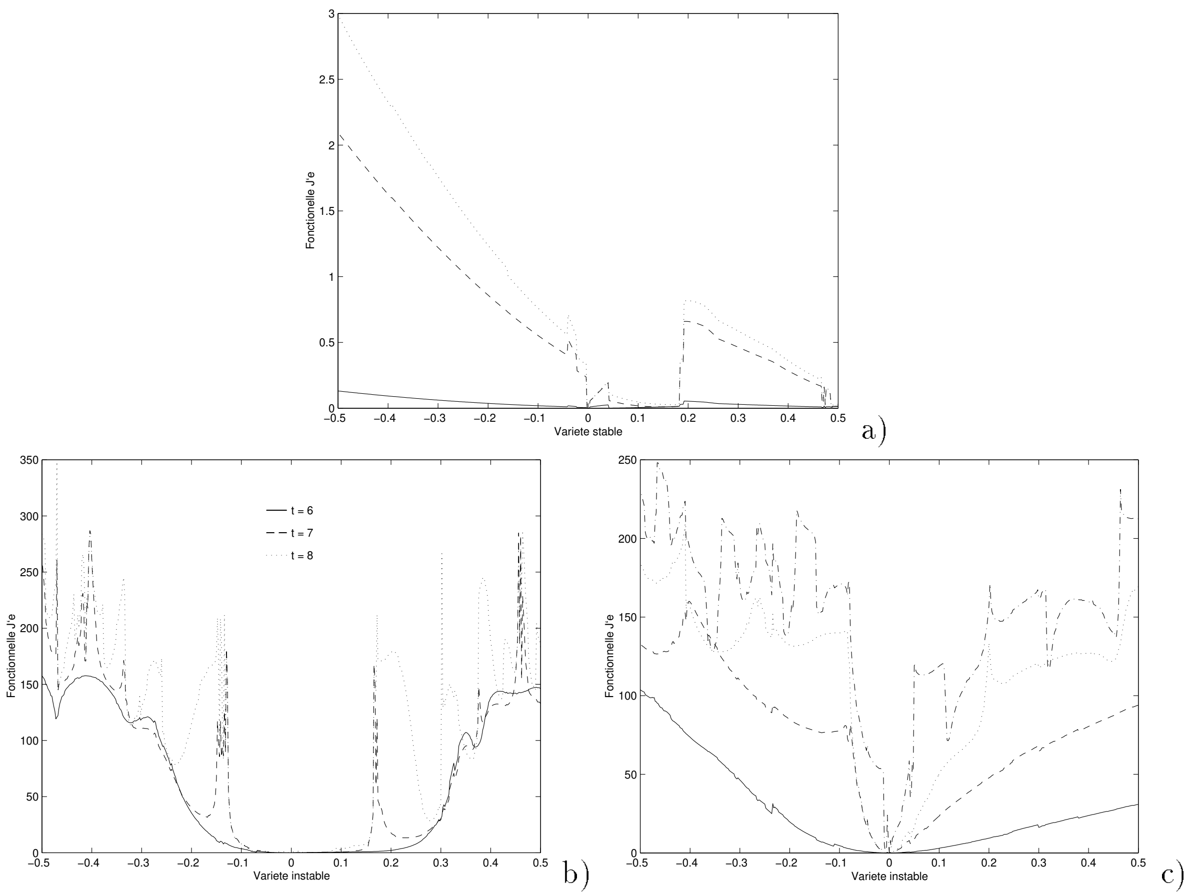

FIG. 2: (a) Variations de la fonctionnelle $J'_e(\tau, \hat{x}, x)$ le long de la variété stable. (b-c) Variations de la même fonctionnelle J'_e le long de deux directions orthogonales de la variété instable. Les différentes courbes correspondent à $\tau = 6$ (—), 7 (- -), 8 (...) et 9 (-.-) (pour la courbe (c) seulement).

d'assimilation comprend une oscillation de plus, le nombre de minima de la fonctionnelle J'_e dans la variété instable est multiplié par deux.

En effet, chaque minimum local correspond à une orbite qui suit la trajectoire de référence (correspondant au minimum global de la fonctionnelle) d'oscillations autour des deux points fixes, avant de rater une ou plusieurs oscillations (suivant que le minimum local correspond à une valeur faible ou non de la fonctionnelle) plus ou moins tard (suivant que le minimum local est plus ou moins proche dans l'espace du minimum global). Ainsi, considérons le minimum absolu A de la fonctionnelle $J'_e(\tau, \hat{x}, x)$ (avec $\tau = 8$ ici) ainsi que deux autres minima (locaux) B et C de cette même fonctionnelle (figure 3.a). La figure 3.b représente les trajectoires issues de ces trois points, et l'on constate que la trajectoire issue de B, minimum local le plus petit mis à part A, quitte la trajectoire de référence (issue de A) plus tard que celle issue de C, minimum local plus élevé.

D'un point de vue pratique, il est donc essentiel de s'assurer qu'à chaque instant, le point de départ de la minimisation de la fonctionnelle est situé dans le bassin d'attraction du minimum absolu, ce qui garantit un bon résultat.

Remarques :

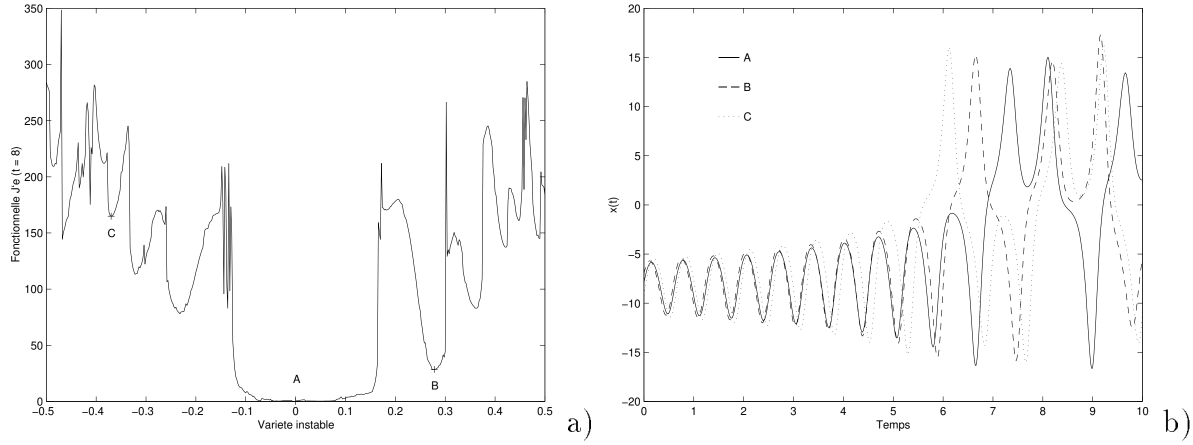

FIG. 3: (a) Fonctionnelle $J'_e(8, \hat{x}, x)$ le long de la variété instable. (b) Trajectoires issues des points A (—), B(- -) et C (...).

- On peut représenter une trajectoire donnée sous forme binaire (oscillation autour de l'un ou l'autre point fixe). Par exemple, la trajectoire de référence (figure 1.b) peut se coder par bbbabbababba. . . Cependant, il convient de noter que cette repésentation a des limitations, car notamment, elle n'est possible que dans un voisinage du minimum absolu (la trajectoire doit osciller en phase avec l'orbite de référence).
- On peut également montrer que lorsque la période d'assimilation est relativement grande, on a pratiquement $J' = J'_e + E^2$, ce qui indique que le minimum global de la fonctionnelle J' est une bonne approximation de l'état réel du système.

3 Minimum absolu de l'erreur d'assimilation

3.1 Définitions, propriétés du minimum absolu

Considérons l'évolution de l'erreur commise en remplaçant l'état réel du système $x(t)$ par une solution $\hat{x}(t)$ de (1), $\delta x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. En supposant que la solution $\hat{x}(t)$ soit une bonne estimation de l'état du système, $\delta x(t)$ est en première approximation régi par le système linéaire tangent résultant de la linéarisation de l'équation (1) :

$$\frac{\mathrm{d}(\delta x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t)).\delta x(t). \tag{7}$$

C'est un système linéaire, donc le passage d'une condition initiale $\delta x(0)$ à la valeur correspondante $\delta x(t)$ au temps t est donné par :

$$\delta x(t) = H(t, x)\delta x(0), \tag{8}$$

où $H(t, x)$ est la résolvante du système. La fonctionnelle rétrograde peut donc se réécrire :

$$\begin{aligned} J(\tau, x, \delta x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \|\delta x(t_i) - \varepsilon(t_i)\|^2 \\ &= \frac{1}{N+1}\langle \delta x, U(\tau, x)\delta x\rangle + \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\|\varepsilon(t_i)\|^2 - \frac{2}{N+1}\langle \nu(\tau, x), \delta x\rangle, \end{aligned} \tag{9}$$

avec

$$U(\tau, x) = \sum_{i=0}^{N} H^t(t_i, x)H(t_i, x), \quad \nu(\tau, x) = \sum_{i=0}^{N} H^t(t_i, x)\varepsilon(t_i). \tag{10}$$

Par dérivation de (9), on trouve que la fonction de coût $J(\tau, x, \delta x)$ a un unique minimum

$$\delta x^* = U(\tau, x)^{-1}\nu(\tau, x). \tag{11}$$

Soit $C(\tau, x) = E(\delta x^* \delta x^{*t})$ la matrice de covariance de l'erreur d'assimilation; en utilisant (10) et (11), et par hypothèse d'isotropie de l'erreur d'observation $\varepsilon(t)$, on a :

$$C(\tau, x) = \sigma^2 U(\tau, x)^{-1}. \tag{12}$$

3.2 Propriétés de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation $C(\tau, x)$ est symétrique, définie positive. Si u est un vecteur unitaire, le produit scalaire $\langle u, C(\tau, x)u\rangle$ est la variance de l'erreur d'assimilation selon la direction u. On a les trois propriétés suivantes :

- La fonction $\tau \mapsto \langle u, C(\tau, x)u\rangle$ est décroissante, quelle que soit la direction u. Ceci implique donc que la variance de l'erreur d'assimilation décroît toujours lorsqu'on étend la période d'assimilation dans le passé.
- La matrice de covariance $C(\tau, x)$ tend vers une matrice limite $C_\infty(x)$ lorsque $\tau \to \infty$.
- $C_\infty(x)$ est une matrice non nulle (ce qui montre que seules certaines composantes de l'erreur d'assimilation disparaissent lorsqu'on rajoute de plus en plus d'observations passées dans le processus d'assimilation) dont le noyau est le sous-espace orthogonal à la variété instable.

L'erreur d'assimilation se concentre donc le long de la variété stable au début de la période d'assimilation, et le long de la variété instable à la fin de la période.

4 Assimilation variationnelle quasi-statique dans le système de Lorenz

Nous allons maintenant voir deux algorithmes d'assimilation variationnelle permettant de calculer le minimum global de la fonctionnelle directe J' et donc de trouver une bonne approximation de l'état actuel du système. La minimisation est basée sur un algorithme de descente, et le système de Lorenz est intégré avec une méthode du type Runge-Kutta.

4.1 Assimilation variationnelle quasi-statique (QSVA)

Comme cela a été précisé plus haut, la minimisation s'effectue sur la fonctionnelle directe, et donc par rapport à l'état du système $\hat{x}(-\tau)$ au début de la période d'assimilation. Cet algorithme (appelé QSVA) se décompose en trois étapes :

- Initialisation : On utilise $\hat{x}^{(0)} = \tilde{x}(-\tau)$ (observation correspondant au début de la période d'assimilation) comme point de départ de la minimisation de la fonctionnelle $J'(\delta\tau, \hat{x}(-\tau), x(-\tau))$, définie sur l'intervalle de temps $(-\tau, -\tau+\delta\tau)$, et on note $\hat{x}^{(1)}$ le vecteur réalisant ce minimum.
- Pour passer de l'étape i à l'étape $i+1$: On utilise $\hat{x}^{(i)}$ obtenu à l'étape précédente comme point de départ pour la minimisation de la fonctionnelle $J'((i+1)\delta\tau, \hat{x}(-\tau), x(-\tau))$ définie sur l'intervalle $(-\tau, -\tau+(i+1)\delta\tau)$, et on note $\hat{x}^{(i+1)}$ le vecteur réalisant ce minimum. On procède ainsi pour i variant de 1 à $M-1$, avec M tel que $\tau = M\delta\tau$.
- Dernière étape : $\hat{x}^{(M)}$ est supposé être le minimum absolu de la fonctionnelle $J'(\tau, \hat{x}(-\tau), x(-\tau)) = J(\tau, \hat{x}(0), x(0))$. Pour obtenir le vecteur d'état estimé $\hat{x}(0)$, on intègre le modèle sur la période d'assimilation, avec comme condition initiale $\hat{x}^{(M)}$ au temps $-\tau$.

Cet algorithme permet de suivre le minimum absolu de la fonctionnelle sur des périodes d'assimilation de durées croissantes. Néanmoins, on ne peut obtenir le minimum absolu que si le point de départ de chaque nouvelle minimisation est dans le bassin d'attraction du minimum global. Cela nécessite que les erreurs d'observation et l'intervalle de temps entre deux observations successives soient suffisamment petits.

Cet algorithme a été testé avec 100 réalisations indépendantes de l'erreur d'observation, pour $t \in [0,0]$ $(\tau = 0)$, $t \in [-1,0]$ $(\tau = 1)$ et $t \in [-2,0]$ $(\tau = 2)$. $\tau = 0$ correspond à une situation où il n'y a pas d'assimilation, et donc l'erreur d'assimilation est identique à l'erreur d'observation. Les figures 4.a-d montrent les nuages dans l'espace des 100 solutions d'assimilation obtenues. Pour $\tau = 2$, les solutions obtenues sont coplanaires et la figure 4.d correspond à la projection planaire de la figure 4.c.

On s'aperçoit que le nuage des solutions tend à s'écraser sur un plan, qui correspond à la variété instable. L'erreur d'assimilation est donc presque nulle selon la variété stable. De plus, à partir de $\tau = 2$, aucune amélioration significative n'a lieu si on augmente la durée de la période d'assimilation. Il est donc quasiment inutile et surtout très coûteux d'utiliser l'algorithme QSVA pour des périodes d'observation supérieures à 2 ou 3 pour le système de Lorenz.

4.2 Assimilation variationnelle quasi-statique séquentielle

L'algorithme précédent est efficace, mais il présente l'inconvénient de nécessiter beaucoup de minimisations répétées sur des périodes de longueur croissante, ce qui est coûteux en temps de calcul. On peut donc lui adjoindre l'algorithme suivant :

- Supposons qu'on ait trouvé le minimum absolu de $J'(\tau, \hat{x}, x(t-\tau))$, correspondant à l'intervalle $(t-\tau, t)$, où t est le temps présent. On note cette solution $\hat{x}(t-\tau)$.
- On intègre le système de Lorenz sur la durée $\delta\tau$ en partant de $\hat{x}(t-\tau)$, ce qui nous permet d'obtenir l'état correspondant $\hat{x}(t-\tau+\delta\tau)$.
- On minimise maintenant la fonctionnelle $J'(\tau, \hat{x}, x(t-\tau+\delta\tau))$ en partant de $\hat{x}(t-\tau+\delta\tau)$. La nouvelle solution définit un état initial pour une prévision au temps $t+\delta\tau$.

Ce procédé peut être répété, chaque nouvelle minimisation ayant lieu sur un intervalle translaté de $\delta\tau$ par rapport à l'intervalle de temps de la précédente minimisation. Ainsi,

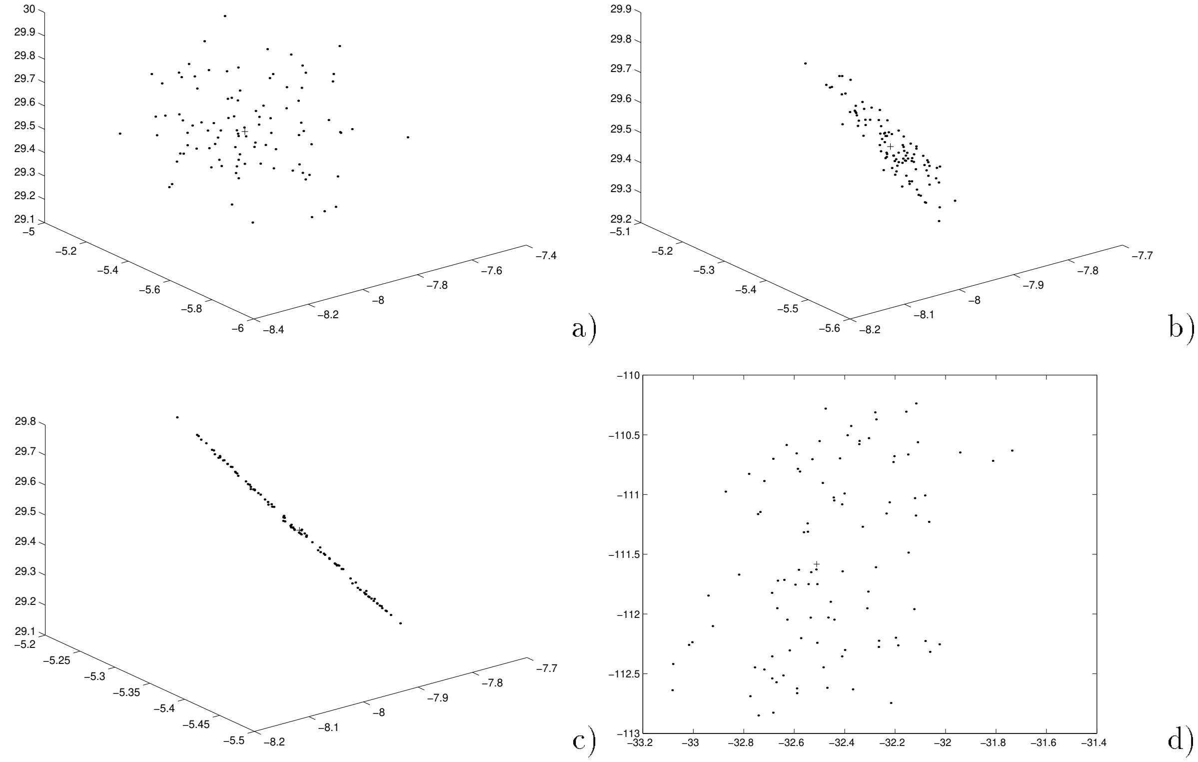

FIG. 4: (a-c) Représentation des 100 solutions minimisantes, à la fin de la période d'assimilation, pour $\tau = 0$, 1, et 2 respectivement. (d) Projection des 100 solutions (coplanaires) pour $\tau = 2$.

toutes les minimisations ont lieu sur des intervalles de même longueur.

Il convient donc d'utiliser par exemple une fois QSVA afin de trouver le minimum absolu de la fonctionnelle $J'(\tau, \hat{x}(-\tau), x(-\tau))$, puis dès qu'on a de nouvelles observations disponibles, on applique ce nouvel algorithme pour suivre le minimum global.

Les 100 réalisations indépendantes de l'erreur d'observation effectuées au §3.1 ont permis de tester ce nouvel algorithme sur des périodes d'observation plus longues, toujours avec $\tau = 2$, mais les solutions ont ici été suivies sur une période de longueur 2 ($\delta\tau$ a été choisi égal à 0.2 et l'algorithme séquentiel a été utilisé 10 fois). L'assimilation correspond donc à une période de longueur 4. Comme pour $\tau = 2$ sans suivi des solutions, les solutions obtenues sont coplanaires, et les figures 5.a et 5.b les représentent dans l'espace et en projection sur leur plan de coplanairité respectivement.

On constate qu'il n'y a pas de gain par rapport à une assimilation sur une période de durée 2, mais chaque minimisation s'effectuant sur une période de durée constante (égale à 2 dans ce cas), cet algorithme est linéaire en le nombre d'appels à la fonctionnelle au lieu d'être quadratique comme le QSVA, et donc celui-ci est recommandé pour suivre le minimum absolu lors d'apports de nouvelles données.

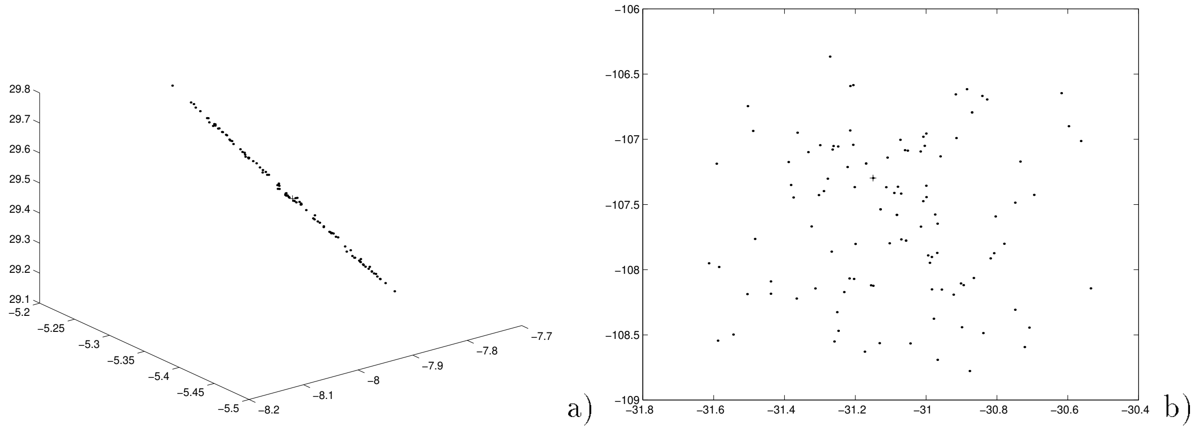

FIG. 5: Représentation des 100 solutions d'assimilation pour $\tau = 4$ dans l'espace (a) et dans leur plan commun (b).

5 Conclusion

Un des principaux résultats est que l'assimilation permet de réduire considérablement l'erreur le long des modes stables du système, mais cette erreur ne peut pas être réduite à zéro en augmentant la période d'assimilation. De façon analogue, on peut montrer que l'assimilation d'observations futures réduit l'erreur le long des modes instables. Si des observations étaient disponibles avant et après l'instant où l'on cherche à déterminer l'état du système, l'erreur d'assimilation serait petite dans toutes les directions. Ceci a deux conséquences importantes. Tout d'abord, ceci augmente l'importance, dans un processus de réanalyse des observations passées, d'utiliser des observations réalisées aussi bien avant qu'après le temps auquel on cherche à estimer la situation. De plus, ceci montre que n'importe quelle information future serait très utile pour l'assimilation (ces informations peuvent éventuellement être fournies par des modèles empiriques du système atmosphérique).

Références

[1] C. Pires, R. Vautard and O. Talagrand, *On extending the limits of variational assimilation in nonlinear chaotic systems*, Tellus (1995), 47A, 96-121.

[2] V. Dymnikov and A. Filatov, *Mathematics of Climate Modeling*, Birkhäuser (1997), 346 pp.

[3] Z. Toth and E. Kalnay, *Ensemble Forecasting at NMC : The Generation of Perturbations*, Bulletin of the American Meteorological Society (1993), 2317-2330.

[4] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble (1991).

[5] B. Larrouturou, P.-L. Lions, *Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur : Optimisation et commande optimale*, Département de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique.

[6] F. Carrere, *Optimisation de formes en aérodynamique hypersonique avec contraintes géométriques et furtivité électromagnétique.*