INFLUENCE DE LA DIFFUSION DANS LA MÉTHODE DE L'ADJOINT POUR L'ASSIMILATION DE DONNÉES

DIDIER AUROUX

*Exposé réalisé dans le cadre du cours d'*Assimilation de données en météorologie et océanographie *du D.E.A. de Mathématiques Appliquées de Grenoble*

Résumé. Ce rapport est basé sur l'article *The influence of diffusion and associated errors on the adjoint data assimilation technique* de Y. Li et K.K. Droegemeier, Tellus (1993) 45A, 435-448. Nous regardons l'influence de la diffusion (et de ses erreurs de représentation) sur la méthode de l'adjoint dans l'assimilation de données. Certains modes propres de la condition initiale sont complètement atténués par rapport à d'autres, phénomène accentué par l'augmentation de la longueur de la période d'assimilation.

1. Introduction

Un des plus grands problèmes actuels en prévision météorologique ou océanographique est la reconstitution de l'état initial du système, à partir duquel sera calculée l'évolution future du système. La reconstitution de cet état peut être réalisée en utilisant les observations disponibles grâce à des techniques d'assimilation variationnelle de données qui consistent à minimiser (au sens des moindre carrés) l'écart entre les observations et les états estimés du système.

On utilise alors la méthode de l'adjoint de premier ordre afin de calculer le gradient de la fonction-coût à minimiser, qui consiste à effectuer alternativement des intégrations directes (*resp.* rétrogrades) du système direct (adjoint). Cette méthode est l'une des meilleures, mais elle contient des effets diffusifs irréversibles. Ces effets néfastes ont deux conséquences directes :

- Il y a perte de l'information contenue dans la condition initiale à long terme, et donc les observations disponibles à des temps grands seront inutilisables pour reconstituer l'état initial.
- De plus, si la diffusion est mal représentée, les phénomènes de petite échelle (et à des temps plus longs, de grande échelle) ne seront pas simulés de façon convenable, voire presque inexistants.

Nous étudierons tout d'abord l'influence de la diffusion et de sa bonne évaluation dans un cas particulier linéaire, puis nous nous placerons plus directement dans le contexte de l'assimilation de données par la méthode de l'adjoint.

2. Analyse du problème dans un cas linéaire

Plaçons nous dans le cas de l'équation de diffusion (ou équation de la chaleur) monodimensionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

avec ν le coefficient de diffusion. Une analyse de type Fourier nous permet de décomposer u suivant ses modes propres :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t), \quad u_k(x,t) = U_k(t)\cos(kx). \tag{2}$$

En substituant (2) dans (1), on obtient la solution sous la forme :

$$u_k(x,t) = u_k(x,0)\mathrm{e}^{-k^2\nu t}. \tag{3}$$

Il est alors judicieux d'introduire un *coefficient de croissance* mesurant l'écart entre la solution au temps t et au temps 0 :

$$r_k(t) = \frac{\|u_k(x,t)\|}{\|u_k(x,0)\|} = \mathrm{e}^{-k^2\nu t} \to 0 \tag{4}$$

lorsque $t \to \infty$ si $k \neq 0$. On peut alors introduire un *temps critique* T_c tel que si $t \geqslant T_c$, $r_k(t) \leqslant \varepsilon$, avec ε choisi pour mesurer la négligeabilité. D'après (4), on a $T_c = \dfrac{L^2 \ln(\frac{1}{\varepsilon})}{4\pi^2\nu}$ avec L la longueur d'onde $\frac{2\pi}{k}$. Une première conclusion est que les observations disponibles à des

Date: 17 Février 2000.

temps $t \geqslant T_c$ sont totalement inutiles pour reconstituer l'état initial, la solution $u_k(x,t)$ étant négligeable devant la condition initiale $u_k(x,0)$.

Supposons que l'on dispose de $u_k^{obs}(x,T)$ à un certain instant T, on cherche $u_k^{model}(x,0)$ qui vaut, en théorie (*i.e.* si les observations étaient non biaisées), $u_k^{obs}(x,0)$. Si l'on pose $u_k^{model}(x,T) = u_k^{obs}(x,T)$, (3) permet d'affirmer que

$$u_k^{model}(x,0) = u_k^{obs}(x,0)\mathrm{e}^{-k^2(\nu^{obs}-\nu^{model})T}. \tag{5}$$

Si la diffusion associée au modèle est plus grande que celle des observations ($\nu^{obs} - \nu^{model} < 0$), une amplification de l'état initial aura lieu pour $k \neq 0$. Cette amplification sera catastrophique pour les phénomènes de petite échelle (L petit, *i.e.* k grand), et les états prédits du système contiendront de fortes perturbations aux petites échelles.

Dans le cas contraire ($\nu^{obs} - \nu^{model} > 0$), l'état initial du système sera considérablement atténué (spécialement les phénomènes à petite échelle). Cela est aggravé par une augmentation de T puisque la distorsion de l'état initial (atténuation des modes *petite échelle* par rapport aux modes *grande échelle*) est exponentielle en T.

3. Influence de la diffusion sur la méthode de l'adjoint

Plaçons nous désormais dans le cadre de la méthode adjointe. La formulation variationnelle du problème est la suivante :

$$J(u(x,0)) = \int_0^T \int_0^X \|u(x,t) - u^{obs}(x,t)\|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

et il faut trouver $u(x,0)$ qui minimise J. La version discrétisée de ce problème est

$$J(u_k(0), k = 0 \dots K) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{K}(u_k(T_i) - u_k^{obs}(T_i))^2 = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{K}(u_k(0)\mathrm{e}^{-k^2\nu T_i} - u_k^{obs}(T_i))^2 \tag{7}$$

en supposant $T_0 = 0$. Les dérivées partielles de J par rapport aux données initiales sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_k(0)} &= \sum_{i=0}^{N} 2\left[u_k(0)\mathrm{e}^{-k^2\nu T_i} - u_k^{obs}(T_i)\right]\mathrm{e}^{-k^2\nu T_i} \\ &= \sum_{i=0}^{N} 2\left[u_k(0)\mathrm{e}^{-k^2\nu^{model}T_i} - u_k^{obs}(0)\mathrm{e}^{-k^2\nu^{obs}T_i}\right]\mathrm{e}^{-k^2\nu^{model}T_i}, \end{aligned} \tag{8}$$

et le minimum de J vérifie $\nabla J = 0$ donc l'expression (8) est nulle, et on a :

$$u_k(0) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{N}\mathrm{e}^{-k^2(\nu^{obs}+\nu^{model})T_i}}{\sum_{i=0}^{N}\mathrm{e}^{-k^2(\nu^{model}+\nu^{model})T_i}}\right]u_k^{obs}(0). \tag{9}$$

La quantité entre crochets dans l'équation (9) mesure la distorsion du champ dûe aux erreurs de représentation de la diffusion. On peut remarquer que si $N = 1$, (9) devient exactement (5).

Si $\nu^{model} > \nu^{obs}$, $u_k(0)$ est amplifié exponentiellement puisque la quantité entre crochets est plus grande que 1. Dans le cas contraire, les phénomènes présents à petite échelle seront complètement atténués, et le champ initial sera alors excessivement lisse. Ces effets s'aggravent lorsque la longueur de la période d'assimilation augmente. En effet, lorsque T augmente, l'écart entre le facteur multiplicatif de (9) et 1 augmente de façon exponentielle, ce qui montre que la mauvaise représentation de la diffusion dans le modèle influe de plus en plus négativement au fur et à mesure que T augmente.

4. Conclusion

Nous avons vu que la diffusion atténuait l'information contenue dans les données initiales. Lorsque le coefficient de diffusion du modèle est plus grand (*resp.* petit) que celui présent dans les observations, le champ initial sera alors amplifié (*resp.* atténué). Ces effets augmentent de façon dramatique lorsque la durée d'assimilation des données augmente. Ceci semble suggérer que la diffusion joue un rôle important dans le contrôle de l'erreur d'assimilation de données.

E-mail address: `Didier.Auroux@ens-lyon.fr`