MAM4-SI4 - Optimisation **2011-2012**

TD n°1 : Dérivabilité et calcul de dérivées de Fréchet

Définition : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est Fréchet dérivable (ou différentiable au sens de Fréchet) en x s'il existe une forme linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que $f(x+h) = f(x) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. On pourra noter $f'(x) = L$ la forme linéaire. On peut remplacer $\|h\|\varepsilon(h)$ par $o(h)$.
Le gradient de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est le vecteur $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Le Hessien de f est la matrice $\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$.
Le Jacobien de $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est la matrice $JF = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$.

Exercice 1 : Calcul de dérivées au sens de Fréchet

1.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$
$$x \to f(x) := \langle c, x \rangle + b, \text{ avec } c \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}.$$
Calculer la dérivée de Fréchet de f au point x, puis le gradient $\nabla f(x)$. Calculer la dérivée au second ordre $f''(x)$, puis le hessien $\nabla^2 f(x)$.

1.2. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$
$$x \to F(x) := Ax + b, \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^m.$$
Calculer la dérivée de Fréchet de F, puis le Jacobien $JF(x)$.

1.3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$
$$x \to f(x) := \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c, \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}.$$
Calculer la dérivée et le gradient de f. Calculer la dérivée au second ordre et le hessien de f.

1.4. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$
$$x \to g(x) := \sum_{i=1}^{m} (r_i(x))^2, \text{ où les } r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ sont deux fois différentiables.}$$
Calculer la dérivée et le gradient de g, puis la dérivée seconde et le hessien de g.

Exercice 2 : Dérivabilité

2.1. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$
$$x \to g(x) := \sum_{i=1}^{m} \left(f_i^+(x)\right)^2,$$
où les $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fois dérivables et $a^+ = \max(0, a)$. La fonction g est-elle dérivable, deux fois dérivable ?

2.2. Soit
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "g:=foA"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$
, avec $A : u \to A_0 u + b$ et $A_0 \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et f deux fois différentiable.

Exprimer ∇g et $\nabla^2 g$ en fonction de ∇f et $\nabla^2 f$.

Application : soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$. On pose $\varphi(t) := f(x_0 + td)$. Calculer $\varphi'(t)$ (resp. $\varphi''(t)$) en fonction de $\nabla f(x_0 + td)$ (resp. $\nabla^2 f(x_0 + td)$).