Pourquoi peut-on (faut-il) s'intéresser aux problèmes indécidables indépendants de ZFC ?

Ensembles projectifs et Hypothèse du continu

Fabien Givors

15 février 2009

Résumé

Je vais tenter de retranscrire dans cette note une partie des choses que j'ai comprises en listant *The Continuum Hypothesis* de W. Hugh Woodin paru dans NOTICES OF THE AMS juin/juillet 2001[2] et août[3]. D'autres papiers ont été publiés depuis cet article, mais je n'ai pas eu le temps de les lire.

Je me rends compte qu'il était très ambitieux au vu de mon temps disponible et de mes connaissances en topologie, théorie des modèles et théorie des ensembles de m'attaquer à un tel sujet. Cependant, je ne regrette pas de l'avoir étudié et espère avoir le temps nécessaire pour le comprendre dans quelques temps.

Références

[1] P. Dehornoy. Progrès récents sur l'hypothèse du continu (d'après woodin). Séminaire Bourbaki, 2003.

[2] W. Hugh Woodin. The continuum hypothesis, part 1. *Notices of the AMS*, 48(6) :567–576, Juin/Juillet 2001.

[3] W. Hugh Woodin. The continuum hypothesis, part 2. *Notices of the AMS*, 48(7) :681–691, Août 2001.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Ce que l'on savait sur HC

Hypothèse du continue (HC). *Tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est en bijection soit avec $\mathbb{N}$ soit avec $\mathbb{R}$.*

La question est soulevée par Cantor vers 1890 : « L'hypothèse du continue est-elle vraie ? ». La question est devenue première sur la liste de Hilbert en 1900.

Une fois posé le système axiomatique **ZFC**, le problème de savoir si « **HC** » ou « $\neg$**HC** » était prouvable dans cette théorie a été longuement étudié. Deux résultats ont clos la question.

Théorème (Godel, 1938). *Si **ZFC** est non contradictoire, il n'existe pas de preuve de $\neg$**HC** à partir de **ZFC**.*

Théorème (Cohen, 1963). *Si **ZFC** est non contradictoire, il n'existe pas de preuve de **HC** à partir de **ZFC**.*

Plusieurs attitudes faces à ces résultats sont alors possibles. La première : on peut se dire que la question étant indépendante de **ZFC**, elle n'est as intéressante et toute recherche sur la question est inutile. L'autre qui sera évidemment celle qui va nous intéresser ici est la suivante. **ZFC** ne permet pas de donner une valeur de vérité à toutes les propriétés sur les ensembles. Cela signifie simplement qu'elle est incomplète et qu'il faut lui rajouter des axiomes. Il faut trouver les axiomes les plus « pertinents » pour décrire l'univers mathématique.

1.2 Les grands cardinaux

Les grands cardinaux sont une série d'axiomes affirmant l'existence « d'infinis d'ordre supérieur, dépassant les infinis qui les précèdent à la façon dont l'infini dépasse le fini. »[1]

Tout comme il y a un axiome dans **ZFC** pour l'existence des ensembles infini, les grands cardinaux supposent l'existence d'infinis non atteignables par les axiomes de **ZFC**. Ce qui nous intéresse ici c'est qu'ils permettent de décider tout un tas de proposition indécidable dans **ZFC**, et ce de manière consistante et intuitive. En fait, *on* pense qu'il faut les admettre, ou du moins, ne pas les contredire.

2 La problématique

2.1 Restrictions du problème et arithmétique

Connaître tous les énoncés de **ZFC** reviendrait à déterminer les énoncés satisfaits dans la structure $(V, \in)$, où V est la classe de tous les ensembles.

Il est bien entendu impossible de décider tous ces énoncés. Une restriction que l'on peut poser pour obtenir un ensemble plus réduit que V est sur la cardinalité des ensembles considérés.

On note ainsi H_k l'ensemble de tous les ensembles A héréditairements de cardinal strictement plus petit que $\aleph_k$ (*i.e*, dont les éléments sont eux aussi héréditairement de cardinal strictement plus petit que $\aleph_k$)

Considérons donc H_0, et $\mathbf{ZF}^{fini}$ le système **ZF** privé de l'axiome d'existance d'un ensemble infini.

Lemme 2.1. *À partir des axiomes de $\mathbf{ZF}^{fini}$, on peut définir à l'intérieur de $(H_0, \in)$ une copie de $(\mathbb{N}, +, \times)$. Et inversement, on peut définir une copie de $(H_0, \in)$ à l'intérieur de $(\mathbb{N}, +, \times)$ avec les axiomes de Peano.*

On a donc qu'à un codage près, $(H_0, \in)$ et $(\mathbb{N}, +, \times)$ ont des descriptions équivalentes et d'après Gödel, on sait qu'elles sont insuffisantes pour caractériser l'ensemble des propriétés satisfaites par ces structures.

Pour *démontrer* un plus grand nombre de ces propriétés, on a l'habitude de raisonner dans la théorie plus puissante qu'est **ZFC**. Au lieu de démontrer avec $\mathbf{ZF}^{fini}$ une propriété φ de $(\mathbb{N}, +, \times)$, on prouvera que « $(\mathbb{N}, +, \times)$ satisfait φ » dans **ZFC**.

Là encore, pas Gödel, la description reste incomplète, mais en pratique satisfaisante.

2.2 Un modèle de ZFC

ZFC est une axiomatique parlant de l'appartenance entre ensembles. On peut donc la modéliser par une structure $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ où $L \neq \emptyset$ et $E \subseteq M \times M$ est une relation binaire sur M représentant $\in$ de sorte que les axiomes de **ZFC** soient satisfaits. On prendra donc comme modèle de **ZFC** $(V, \in)$ où V joue le rôle de collection de tous les *vrais* ensembles et $\in$ de la *vraie* relation d'appartenance définie par les axiomes.

Messieurs Gödel et Cohen ont donc « simplement » construit un modèle de **ZFC** dans lequel **HC**était respectivement *satisfaite* et *non-satisfaite*. Pour ce faire, ils sont tous les deux partis d'un modèle « quelconque », le premier en a extrait un sous-modèle et le second en a créé une extension avec sa méthode de « forcing ».

2.3 L'arithmétique, et après ?

L'arithmétique $((\mathbb{N}, +, \times))$ possède une certaine stabilité. En effet, aucune de ses propositions indécidables ne sont pas « forçables » par la méthode de forcing. L'objectif de Woodin et de ses collègues et de renforcer **ZFC** de manière à ce que $(H_1, \in)$ et plus généralement, $(H_k, \in)$ avec $k \leq 1$, possèdent la même « stabilité ».

2.4 La quête de la vérité essentielle

Un énoncé φ portant sur une structure définissable $(H, \in)$ est dit *essentiellement vrai* si

(i) il est possible de trouver un cadre axiomatique, **ZFC** ou **ZFC** complété d'axiome(s) compatible(s) avec l'existence de grands cardinaux, fournissant une description complète de $(H, \in)$ et en rendant les propriétés invariantes par forcing ;

(ii) toute telle solution implique que φ soit vrai.

Autrement dit, on cherche à clore $(H, \in)$ sous les contraintes de compatibilité avec les grands cardinaux et d'invariance par forcing.

3 $(H_1, \in)$

3.1 Le nouveau problème, état des lieux

Avec $(H_0, \in)$, on manipulait uniquement des ensembles finis, autrement dit, des nombres. Cette fois-ci, on s'autorise à manipuler des ensembles dénombrables. L'univers devient donc d'une certaine manière $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. En fait, de même que nous avons vu qu'il était possible de passer de $(H_0, \in)$ à $(\mathbb{N}, +, \times)$, il est possible de passer de $(H_1, \in)$ à $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in)$, c'est à dire dans l'arithmétique d'ordre 2 : l'arithmétique enrichie par les ensembles d'entiers et la relation d'appartenance.

Tout comme le problème de $(H_0, \in)$ est de connaître les ensembles d'entiers définissables, le problème de $(H_1, \in)$ est de connaître les ensembles d'ensembles d'entiers définissables, c'est à dire qui ont la forme

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \mid \\ &\quad \text{« } (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in) \text{ satisfait } \varphi(x, \vec{a}) \text{ »}\} \end{aligned}$$

où $\vec{a}$ est une suite finie d'éléments de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

En fait, ces ensembles sont exactement les sous-ensembles projectifs[1] de l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ce dernier étant borel-isomorphe à $\mathbb{R}^2$, on se ramène à l'étude des sous-ensembles projectifs de $\mathbb{R}$.

[1]Obtenu à partir d'un borélien de X^{p+k} par un nombre fini de projections et de passages au complémentaire, où X est un espace Polonais.

[2]C'est à dire qu'il existe un isomorphisme entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ telle que l'image réciproque de tout ouvert soit un borélien.

3.2 Un axiome pour $(H_1, \in)$

Soit un sous-ensemble A de $[0, 1]$.

Soit le jeu infini suivant (commençant au tour 1) :

- au tour $2n+1$, Blanc choisit ϵ_{2n+1} parmi $\{0, 1\}$;
- au tour $2(n+1)$, Noir choisit $\epsilon_{2(n+1)}$ parmi $\{0, 1\}$.

Le jeu est gagné par Blanc si $\sum_i \epsilon_i 2^{-1} \in A$. Il est gagné par Noir sinon.

L'ensemble A est dit déterminé s'il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs.

Martin a démontré en 1975 que tous les boréliens sont déterminés. Cependant, **ZFC** est incapable de dire si c'est aussi le cas pour les autres ensembles projectifs.

On note **DP** (détermination projective) l'axiome : « Tout ensemble projectif est déterminé ».

Woodin prétend que cet axiome place $(H_1, \in)$ dans la situation de « quasi-complétude » dans laquelle se trouve $(H_0, \in)$.

Pour satisfaire complètement la condition de stabilité par forcing vue précédemment, il introduit la notion de cardinal de Woodin et prouve que l'existance d'une classe propre de cardinaux de Woodin entraîne l'invariance par forcing et est compatible avec l'axiome **DP**.

4 $(H_2, \in)$

4.1 Mes limites

Là, je commence à avoir du mal à suivre, et il me faudrait comprendre et introduire trop de nouvelles notions pour expliquer comment Woodin fait pour trouver un axiome compatible avec les grands cardinaux et qui assure l'invariance par forcing de $(H_2, \in)$. Toujours est-il que de beaux axiomes entraînent des résultats tels que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. D'autres résultats montrent une profonde dissymétrie entre **HC** et $\neg$**HC**, dont certaines variantes sont prouvables dans des extensions mais pas leur négation.

4.2 Ω-logique

Encore un petit point que je n'aurai pas le temps de développer mais dont l'aspect fait un peu penser à la naissance de la logique linéaire.

« Au cours des dernières années, Woodin a proposé un nouveau cadre conceptuel donnant des résultats précédents une formulation plus intelligible, et, surtout, ouvrant de nombreuses perspectives. L'idée est d'utiliser une logique spécifique intégrant directement l'invariance par forcing et donc, en quelque sorte, corrigeant le flou que celui-ci introduit dans notre perception des ensembles.

Jusqu'à présent, nous avons cherché à caractériser les énoncés satisfaits dans une structure $(H, \in)$ comme ceux qui peuvent être prouvés à partir d'axiomes convenables, au moyen de la notion usuelle de preuve (logique du premier ordre). En utilisant une relation de prouvabilité plus subtile, on peut espérer décrire de façon plus simple des objets qui ne le sont pas, et mettre à jour des phénomènes qui, sinon, resteraient cachés. »[1]

5 Conclusion

Nous ne sommes pas arrivés jusqu'au arguments justifiant plutôt la volonté d'accepter ou de rejeter **HC**, mais nous avons tenté de comprendre quel genre de problématique se posait dans H_2 en traitant un peu mieux le cas H_1. Bien sûr, la complexité des problèmes est sans commune mesure, mais la problématique de fond reste la même : comment étendre **ZFC** de manière intuitive et cohérente pour plus ou moins « clore » les propositions décidables à différents niveaux de H.

Reste encore à se mettre d'accord sur le fait que l'invariance par forcing et la compatibilité aux grands cardinaux soit la bonne méthode de clôture. Je ne sais pas quelles avancées ont été réalisées depuis 2003, mais M. Foreman proposait déjà après les travaux de Woodin d'autres méthodes pour étendre **ZFC**.