Chúc Mừng Năm Mới !

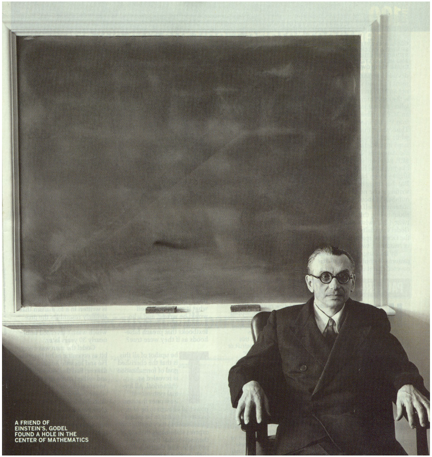
Au delà du forcing : la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles

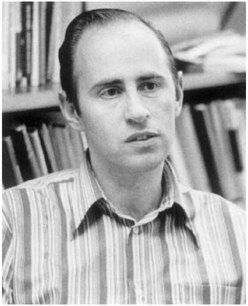
Patrick Dehornoy, 2007

Kevin

15.02.2010

Introduction





Motivation

Le problème du continu après l'indécidabilité

Depuis 1970

Axiomes de grands cardinaux

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Gödel 1938 : ZFC $\not\Rightarrow \overline{\mathrm{HC}}$

Cohen 1963 : ZFC $\not\Rightarrow$ HC

Woodin 1999-2002 ! !

Notion de propriété essentiellement vraie

Motivation

Le problème du continu après l'indécidabilité

Depuis 1970

Axiomes de grands cardinaux

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Gödel 1938 : ZFC $\nRightarrow \overline{\text{HC}}$

Cohen 1963 : ZFC $\nRightarrow$ HC

Woodin 1999-2002 ! !

Notion de propriété essentiellement vraie

Le problème du continu après l'indécidabilité

- fin XIX[e] : Infinis de taille différentes

  pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$

- Problème du continu : $2^{\aleph_0} \stackrel{?}{=} \aleph_1$

  $\aleph_0$ est le cardinal de $\mathbb{N}$
  $2^{\aleph_0}$ est le cardinal de $\mathbb{R}$
  $\aleph_1$ plus petit card strict sup à $\aleph_0$

- Hypothèse du continu (HC) :
  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Le problème du continu après l'indécidabilité

Base axiomatique : ZF, ZFC

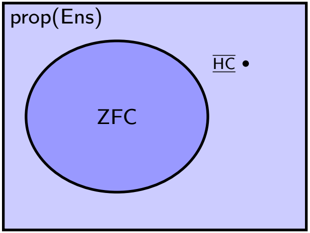
Le problème du continu après l'indécidabilité

- Gödel 1938 : $\overline{\text{HC}}$ non prouvable à partir de ZFC
  sauf si ZFC est contradictoire.
- Cohen 1963 : HC non prouvable à partir de ZFC
  sauf si ZFC est contradictoire.

Le problème du continu après l'indécidabilité

- Gödel 1938 : $\overline{\text{HC}}$ non prouvable à partir de ZFC
  sauf si ZFC est contradictoire.
- Cohen 1963 : HC non prouvable à partir de ZFC
  sauf si ZFC est contradictoire.

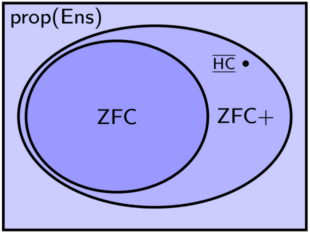
- Le système de Zermelo-Fraenkel n'épuise pas les propriétés des ensembles.



Le problème du continu après l'indécidabilité

- Gödel 1938 : $\overline{\text{HC}}$ non prouvable à partir de ZFC
  sauf si ZFC est contradictoire.
- Cohen 1963 : HC non prouvable à partir de ZFC
  sauf si ZFC est contradictoire.

  - Le système de Zermelo-Fraenkel n'épuise pas les propriétés des ensembles.
  - Il faut le compléter.



N'oublions pas Gödel - 1931.

Le problème du continu après l'indécidabilité

Base axiomatique : ZF, ZFC que l'intuition recommande de considérer comme vrais.

Aucune opposition à en rajouter de nouveaux.

Qu'est ce qu'on rajoute ?

- Selon quels critères ?
  - Ajouter HC en axiome n'est pas le genre de solution qu'on veut.

Motivation

Le problème du continu après l'indécidabilité

Depuis 1970

Axiomes de grands cardinaux

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Gödel 1938 : ZFC $\not\Rightarrow \overline{\mathrm{HC}}$

Cohen 1963 : ZFC $\not\Rightarrow$ HC

Woodin 1999-2002 ! !

Notion de propriété essentiellement vraie

Qu'est-ce que c'est ?

La théorie des ensembles postule l'existence d'ensembles infinis.

- Sans : $\Leftrightarrow$ arithmétique des nombres entiers.
- Avec : Strictement plus forte.

Qu'est-ce que c'est ?

La théorie des ensembles postule l'existence d'ensembles infinis.

- Sans : $\Leftrightarrow$ arithmétique des nombres entiers.
- Avec : Strictement plus forte.

Depuis 1970 : étude des axiomes de grands cardinaux :

- L'infini dépasse le fini selon un aspect κ.
- Existence d'ensemble infinis de type supérieurs dépassant le l'infini selon l'aspect κ.

Pourquoi accepter ces axiomes ?

On veut une théorie la plus générale possible.

(sans qu'elle soit contradictoire)

▷ càd telle que tout autre cadre particulier puisse y être plongé.

Pourquoi accepter ces axiomes ?

On veut une théorie la plus générale possible.

(sans qu'elle soit contradictoire)

▷ càd telle que tout autre cadre particulier puisse y être plongé.

Remarque : On ne refuse pas l'étude d'axiome contredisant les axiomes de grands cardinaux mais on considère que de tels axiomes ne constituent pas le cadre le plus général du calcul ensembliste.

Motivation

Le problème du continu après l'indécidabilité

Depuis 1970

Axiomes de grands cardinaux

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Gödel 1938 : ZFC $\not\Rightarrow \overline{\text{HC}}$

Cohen 1963 : ZFC $\not\Rightarrow$ HC

Woodin 1999-2002 ! !

Notion de propriété essentiellement vraie

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Système ZFC $=$

liste d'axiomes mettant en jeu une relation binaire : $\in$

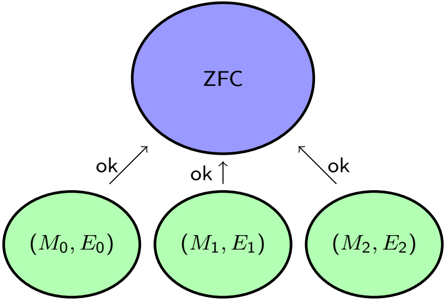
Modèle de ZFC $(M, E) =$

E relation binaire sur M qui satisfait les axiomes de ZFC quand on interprète E par la relation d'appartenance.

Axiomes de ZFC vrais $=$

$(V, \in)$ où V est les vrais ensembles et $\in$ la vraie relation d'appartenance est un modèle de ZFC.

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC



Chaque modèle de ZFC contient sa propre version des entiers, réels, fonctions...
$\Rightarrow$ Chaque modèle de ZFC a sa propre opinion de HC.

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

- Pour montrer que HC n'est pas réfutable à partir de ZFC, il suffit de donner un exemple de modèle de ZFC satisfaisant HC (Gödel en 1938).
- Pour montrer que HC n'est pas prouvable à partir de ZFC, il suffit de donner un exemple de modèle de ZFC ne satisfaisant pas HC (Cohen en 1963).

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Un modèle de ZFC est quelque chose de compliqué.

(il contient une version de l'intégralité du monde mathématique)

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Un modèle de ZFC est quelque chose de compliqué.

(il contient une version de l'intégralité du monde mathématique)

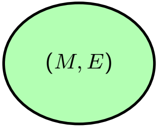
▷ Second théorème d'incomplétude de Gödel :

Impossible d'en construire un, sinon on a une preuve que ZFC n'est pas contradictoire.

Gödel 1938 : ZFC $\not\Rightarrow \overline{\text{HC}}$

- Partant d'un modèle de ZFC qu'on suppose exister…

  (d'où la condition "sauf si ZFC est contradictoire")

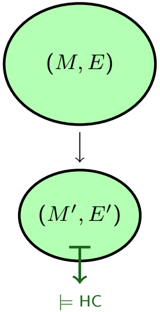


Gödel 1938 : ZFC $\not\Rightarrow$ $\overline{\text{HC}}$

- Partant d'un modèle de ZFC qu'on suppose exister...

  (d'où la condition "sauf si ZFC est contradictoire")

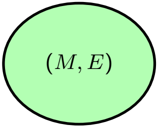
- ...Il montre qu'on peut toujours construire un sous modèle de ZFC satisfaisant HC.



Cohen 1963 : ZFC $\not\Rightarrow$ HC

Même principe :

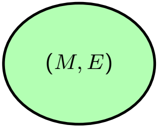
- Prendre un modèle
- En construire un qui ne satisfait pas HC.



Cohen 1963 : ZFC $\nRightarrow$ HC

Même principe :

- ▷ Prendre un modèle
- ▷ En construire un qui ne satisfait pas HC.



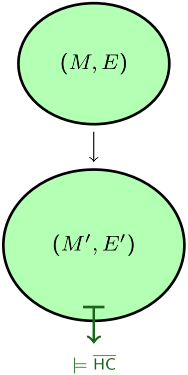
Problème :

- ▷ il existe des modèles tels que tout sous-modèle satisfasse HC (par exemple celui de Gödel).

Cohen 1963 : ZFC $\nRightarrow$ HC

Même principe :

- Prendre un modèle
- En construire un qui ne satisfait pas HC.



Problème :

- il existe des modèles tels que tout sous-modèle satisfasse HC (par exemple celui de Gödel).

Il faut arriver à sortir du modèle initial :

le forcing

On contrôle les propriétés du nouveau modèle depuis l'intérieur de l'ancien.

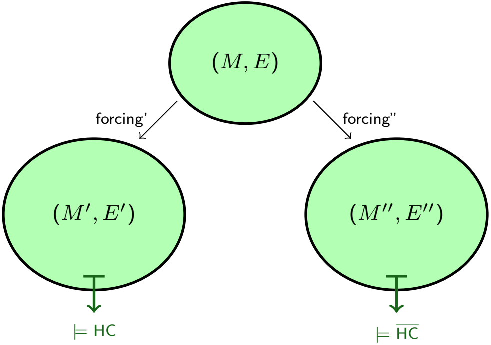
Cohen 1963 : ZFC $\nRightarrow$ HC

Grande souplesse d'applications du forcing :

- ZFC
  - On peut construire un modèle $\models$ HC.
  - On peut construire un modèle $\models \overline{\text{HC}}$
- ZF
  - On peut construire un modèle $\models$ Choix.
  - On peut construire un modèle $\models \overline{\text{Choix}}$.
- ...

Cohen 1963 : ZFC $\nRightarrow$ HC

$\forall\ (M, E)$ modèle de ZFC



Il y a une idée de symétrie,
ou d'indiscernabilité.

On observe ce phénomène pour de nombreuses propriétés.

Motivation

Le problème du continu après l'indécidabilité

Depuis 1970

Axiomes de grands cardinaux

Les preuves d'indécidabilité de HC dans ZFC

Gödel 1938 : ZFC $\not\Rightarrow$ $\overline{\text{HC}}$

Cohen 1963 : ZFC $\not\Rightarrow$ HC

Woodin 1999-2002 ! !

Notion de propriété essentiellement vraie

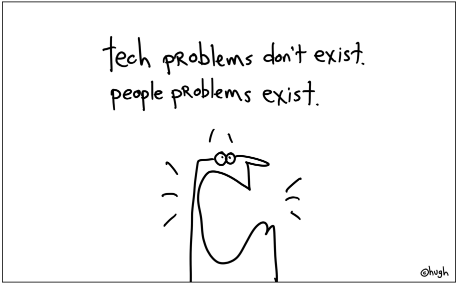
Notion de propriété essentiellement vraie

- Idée : privilégier la brisure des symétries induite par le forcing comme critère de sélection de nouveaux axiomes.

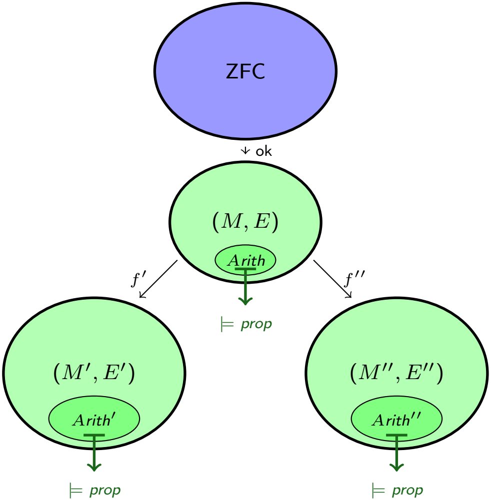
- Observation : le forcing ne change pas les propriétés arithmétiques (sur les entiers, l'addition, la multiplication).

Notion de propriété essentiellement vraie

- Idée : privilégier la brisure des symétries induite par le forcing comme critère de sélection de nouveaux axiomes.
- Observation : le forcing ne change pas les propriétés arithmétiques (sur les entiers, l'addition, la multiplication).

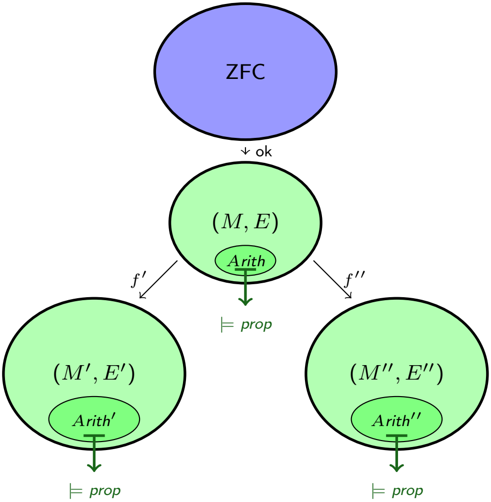


Notion de propriété essentiellement vraie



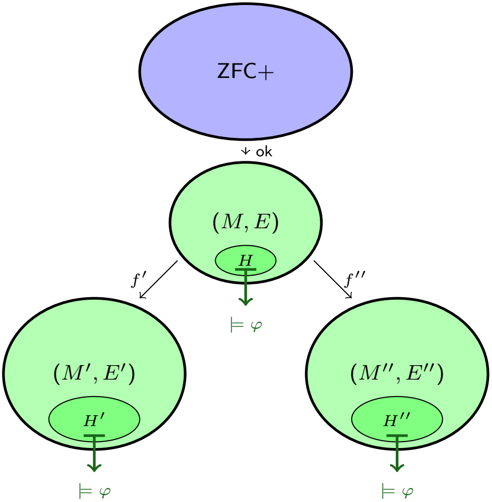
Notion de propriété essentiellement vraie

- Est-ce qu'on peut avoir une invariance par forcing pour des fragments plus grands de l'univers des ensembles ?



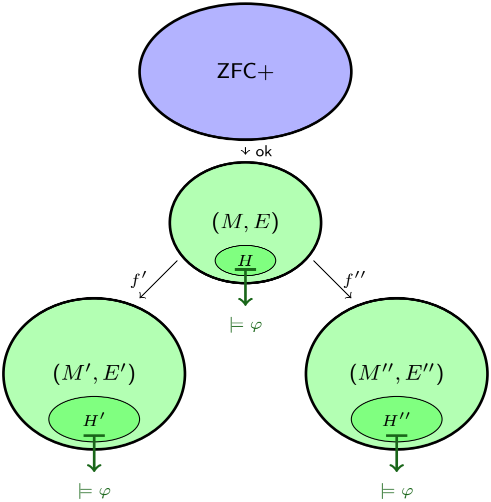
Notion de propriété essentiellement vraie

- Est-ce qu'on peut avoir une invariance par forcing pour des fragments plus grands de l'univers des ensembles ?



Notion de propriété essentiellement vraie

- Est-ce qu'on peut avoir une invariance par forcing pour des fragments plus grands de l'univers des ensembles ?



φ est essentiellement vraie ssi

- Il existe une solution pour H
- et pour toute solution pour H, $(M, E) \models \varphi$

N'oublions pas que les axiomes qu'on ajoute doivent être compatibles avec les axiomes de grands cardinaux.

Notion de propriété essentiellement vraie

- Aucune nécessité pour qu'une propriété φ soit essentiellement vraie ou essentiellement fausse.
- Si une propriété est essentiellement vraie, il y a une dissymétrie en faveur de φ.

Notion de propriété essentiellement vraie

- Aucune nécessité pour qu'une propriété φ soit essentiellement vraie ou essentiellement fausse.
- Si une propriété est essentiellement vraie, il y a une dissymétrie en faveur de φ.
- Limite : le forcing introduit un flou dans la perception des ensembles. La vérité essentielle étudie les zones qui échappent à ce flou.

Conclusion

- Woodin a créé à partir de cette idée la Ω-logique.
  - Cadre logique en rapport avec ZFC.
  - Fourni un critère pour les axiomes à ajouter à ZFC.
    - ZFC $\longrightarrow$ vérité essentielle de H_0 (fini)
    - $+$ Axiome de détermination projective $\longrightarrow$ vérité essentielle de H_1 (dénombrable)
    - $+$ Martin Maximum de Woodin $\longrightarrow$ vérité essentielle de H_2 (au plus $\aleph_1$)

Conclusion

- Woodin a créé à partir de cette idée la Ω-logique.
  - Cadre logique en rapport avec ZFC.
  - Fourni un critère pour les axiomes à ajouter à ZFC.
    - ZFC $\longrightarrow$ vérité essentielle de H_0 (fini)
    - $+$ Axiome de détermination projective $\longrightarrow$ vérité essentielle de H_1 (dénombrable)
    - $+$ Martin Maximum de Woodin $\longrightarrow$ vérité essentielle de H_2 (au plus $\aleph_1$)

- Théorème (Woodin, 2000) : Sauf si la Ω-conjecture est fausse, HC est essentiellement fausse.

  Reformulation : Sauf s'il existe des grands cardinaux d'un type complètement différent de ceux considérés à ce jour, tout axiome neutralisant le forcing jusqu'au niveau de la cardinalité $\aleph_1$ entraîne que l'hypothèse du continu soit fausse.