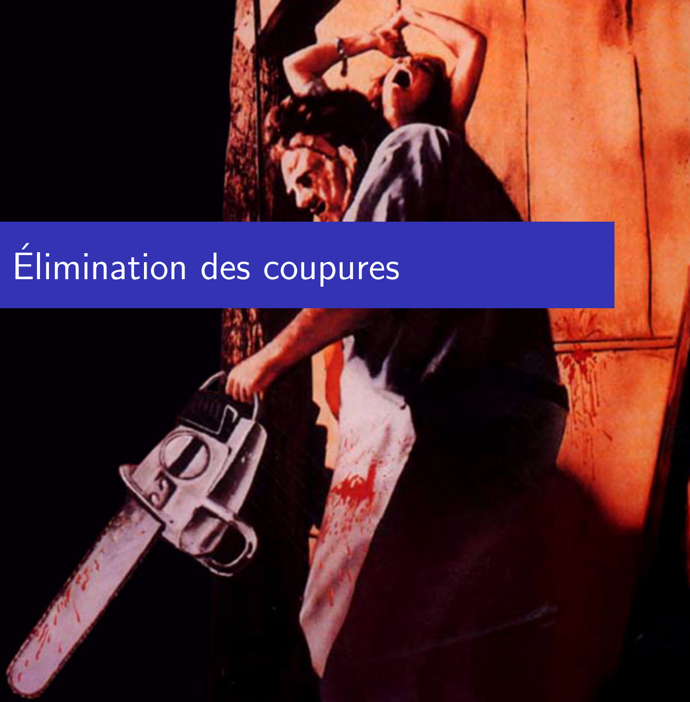
Élimination des coupures



Une coupure, qu'es aquò ?

Une coupure, qu'es aquò ?

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Une coupure, qu'es aquò ?

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Un bonhomme qui arrive du néant est parachuté dans notre arbre de preuve.

Pas possible d'automatiser ça… :(

Une coupure, qu'es aquò ?

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Un bonhomme qui arrive du néant est parachuté dans notre arbre de preuve.

Pas possible d'automatiser ça. . . :(

☞ Est-ce qu'on peut trouver une méthode pour passer d'un arbre avec coupures à un arbre sans coupure ?

Calcul des séquents classique

☞ Théorème d'élimination des coupures (Gentzen)

Calcul des séquents classique

☞ Théorème d'élimination des coupures (Gentzen)

Théorème d'élimination des coupures (Gentzen)

Toute démonstration en calcul des séquents peut être transformée en une démonstration de même conclusion, mais qui n'utilise pas la règle de la coupure.

Et en logique linéaire ?

Degré $\delta(A)$ d'une formule A

Degré $\delta(A)$ d'une formule A

- $\delta(A) = 1$ si A est atomique
- $\delta(A \otimes B) = \delta(A \parr B) = \delta(A \multimap B) = max\{\delta(A), \delta(B)\} + 1$
- $\delta(!A) = \delta(?A) = \delta(A) + 1$

Degré $\delta(A)$ d'une formule A

- $\delta(A) = 1$ si A est atomique
- $\delta(A \otimes B) = \delta(A \parr B) = \delta(A \multimap B) = max\{\delta(A), \delta(B)\} + 1$
- $\delta(!A) = \delta(?A) = \delta(A) + 1$

☞ Degré d'une coupure.

Degré $\delta(A)$ d'une formule A

- $\delta(A) = 1$ si A est atomique
- $\delta(A \otimes B) = \delta(A \parr B) = \delta(A \multimap B) = max\{\delta(A), \delta(B)\} + 1$
- $\delta(!A) = \delta(?A) = \delta(A) + 1$

☞ Degré d'une coupure.

☞ Degré d'une preuve : sup des degrés des coupures de la preuve.

Degré $\delta(A)$ d'une formule A

- $\delta(A) = 1$ si A est atomique
- $\delta(A \otimes B) = \delta(A \parr B) = \delta(A \multimap B) = max\{\delta(A), \delta(B)\} + 1$
- $\delta(!A) = \delta(?A) = \delta(A) + 1$

☞ Degré d'une coupure.

☞ Degré d'une preuve : sup des degrés des coupures de la preuve.

Exemple

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \dfrac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1}{\Gamma', A \vdash \Delta'}\, r'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma_1, A \vdash \Delta_1}{\Gamma_1, \Gamma \vdash \Delta_1, \Delta}}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta', \Delta}\, r'$$

Pseudo-étape-clé ("pseudo-key-case")

- (Étape-clé : réduit le nombre de coupures.)
- 2 pseudo-étapes-clés : ne réduit pas forcément le nombre de coupures
  $(!_R, C_L)$ et $(C_R, ?_L)$

$$\dfrac{!\Gamma \vdash A, ?\Delta}{!\Gamma \vdash !A, ?\Delta}\ !_R \qquad \dfrac{!\Gamma, A \vdash ?\Delta}{!\Gamma, ?A \vdash ?\Delta}\ ?_L$$

$$\dfrac{\Gamma, !A, !A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\ C_L \qquad \dfrac{!\Gamma \vdash ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta}\ C_R$$

Hauteur $h(\tau)$ d'une preuve τ

- τ n'a pas de prémisse : $h(\tau) = 1$
- τ est obtenue depuis la preuve π en appliquant une règle avec une prémisse : $h(\tau) = h(\tau) + 1$
- τ est obtenue depuis les preuves π et π' en appliquant une règle avec 2 prémisses : $h(\tau) = \max\{h(\pi), h(\pi')\} + 1$

Lemme 1

$!A^n$ = liste de n occurrences de la formule $!A$.
Soit τ une preuve de la forme :

$$\frac{\dfrac{\overset{\vdots\,\pi}{!\Gamma \vdash A, ?\Delta}}{!\Gamma \vdash !A, ?\Delta} \qquad \dfrac{\overset{\vdots\,\pi'}{\Gamma', !A^n \vdash \Delta'}}{\Gamma', !A \vdash \Delta'}}{\Gamma', !\Gamma \vdash \Delta', ?\Delta}$$

avec $\delta(\pi), \delta(\pi') < \delta(\tau)$
☞ On peut construire une preuve τ' de $\Gamma', !\Gamma \vdash \Delta', ?\Delta$ telle que $\delta(\tau') < \delta(\tau)$.

Démonstration.

Induction sur $h(\pi')$. r' = dernière règle utilisée dans π'

Cas possibles :

- r' est un axiome : on applique $!_R$ à π
- r' est une instance de $!_L$ qui fait apparaître un $!A$:
  - $n = 1$: étape-clé $(!_R, !_L)$
  - $n > 1$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$!\Gamma \vdash A, ?\Delta$}
\UnaryInfC{$!\Gamma \vdash !A, ?\Delta$}
\AxiomC{$\Gamma', !A^{n-1}, A \vdash \Delta'$}
\UnaryInfC{$\Gamma', !A^{n-1}, !A \vdash \Delta'$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\Gamma', !A \vdash \Delta'$}
\BinaryInfC{$\Gamma', !\Gamma \vdash \Delta', ?\Delta$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$!\Gamma \vdash A, ?\Delta$}
\AxiomC{$!\Gamma \vdash A, ?\Delta$}
\UnaryInfC{$!\Gamma \vdash !A, ?\Delta$}
\AxiomC{$\Gamma', !A^{n-1}, A \vdash \Delta'$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\Gamma', !A, A \vdash \Delta'$}
\BinaryInfC{$\Gamma', !\Gamma, A \vdash \Delta', ?\Delta$}
\BinaryInfC{$\Gamma', !\Gamma, !\Gamma \vdash \Delta', ?\Delta, ?\Delta$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\Gamma', !\Gamma \vdash \Delta', ?\Delta$}
\end{prooftree}
$$

□

Démonstration.

- r' est une instance de W_L qui fait apparaître un $!A$:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\, W_L$$

  $\ldots$

- r' est une instance de C_L qui fait apparaître un $!A$: $\ldots$
- r' ne fait pas apparaître de $!A$: $\ldots$

$\square$

Lemme 2

Soit τ une preuve de la forme :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\pi\\ \Gamma', A \vdash \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\pi'\\ \Gamma \vdash A, \Delta\end{array}}{\Gamma', \Gamma \vdash \Delta', \Delta}$$

avec $\delta(\pi), \delta(\pi') < \delta(\tau)$

☞ On peut construire une preuve τ' du même séquent telle que $\delta(\tau') < \delta(\tau)$.

Démonstration.

Induction sur $h(\pi) + h(\pi')$

r (resp. r') $=$ dernière règle utilisée dans π (resp. π')

- r est une instance d'un axiome : on utilise π'
- r' est une instance d'un axiome : on utilise π
- $\ldots$

$\square$

Lemme 3

Soit τ une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$
☞ On peut construire une preuve τ' du même séquent telle que $\delta(\tau') < \delta(\tau)$.

Démonstration.

Induction sur $h(\tau)$.

- dernière règle utilisée dans $\tau \neq$ coupure avec le même degré que τ : ☞ hypothèse d'induction sur les sous-preuves immédiates de τ ☞ finito.
- sinon : ☞ hypothèse d'induction sur les sous-preuves immédiates de τ. On obtient τ' :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\pi\\ \Gamma', A \vdash \Delta'\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\pi'\\ \Gamma'', A \vdash \Delta''\end{array}}{\Gamma'', \Gamma' \vdash \Delta'', \Delta'}$$

avec $\delta(\pi), \delta(\pi') \leq \delta(\tau')$ ☞ lemme 2

$\square$

Hauptsatz

Étant donnée une preuve d'un séquent, on peut construire une autre preuve sans coupure du même séquent.

Démonstration.

Itérations du lemme 3 $\square$

- On a un algo pour éliminer les coupures en LL.

- On a un algo pour éliminer les coupures en LL.
- On obtient des λ-termes plus courts.

- On a un algo pour éliminer les coupures en LL.
- On obtient des λ-termes plus courts.
- Et en `Coq`, ça marche comment ? `Assert`, ...