

L'équivalence de Curry Howard en logique lineaire

David Salinas

14 février 2010

Sommaire

Isomorphisme classique de Curry-Howard

La logique intuitioniste NJ

Construction de l'équivalence de Curry Howard

Propriété fondamentale

L'isomorphisme linéaire de Curry Howard

La logique intuitionniste linéaire

Le λ - *calcul* linéaire

L'isomorphisme linéaire de Curry-Howard

Interpretation

Logique intuitioniste

La syntaxe

- ▶ Enonces de la forme suivante :

$$p ::= \alpha \mid \perp \mid p \Rightarrow p \mid p \cap p \mid p \cup p$$

Logique intuitioniste

Les regles

$$\frac{}{\Delta, p \vdash p} \text{ (Hyp)}$$

$$\frac{\Delta \vdash p \quad \Delta \vdash q}{\Delta \vdash p \wedge q} (I_{\wedge})$$

$$\frac{\Delta \vdash p}{\Delta \vdash p \vee q} (I_{\vee}^g)$$

$$\frac{\Delta, p \vdash q}{\Delta \vdash p \Rightarrow q} (I_{\Rightarrow})$$

$$\frac{\Delta \vdash p \wedge q}{\Delta \vdash p} (E_{\wedge}^g)$$

$$\frac{\Delta \vdash q}{\Delta \vdash p \vee q} (I_{\vee}^d)$$

$$\frac{\Delta \vdash p \Rightarrow q \quad \Delta \vdash p}{\Delta \vdash q} (E_{\Rightarrow})$$

$$\frac{\Delta \vdash p \wedge q}{\Delta \vdash q} (E_{\wedge}^d)$$

$$\frac{\Delta \vdash p \vee q \quad \Delta, p \vdash r \quad \Delta, q \vdash r}{\Delta \vdash r} (E_{\vee})$$

Equivalence de Curry Howard

Donnez une preuve, je vous donnerai un programme et reciproquement

- ▶ On remplace $\Delta = p_1, \dots, p_n$ par $\Delta = x_1 : p_1, \dots, x_n : p_n$ ou les x_i sont des variables distinctes
- ▶ on annote les noeuds

$$\frac{}{\Delta, x : p \vdash x : p} \text{ (Hyp)} \quad \frac{\Delta, x : p \vdash t : q}{\Delta \vdash \lambda x^p. t : p \Rightarrow q} \text{ (I}\Rightarrow\text{)} \quad \frac{\Delta \vdash t : p \Rightarrow q \quad \Delta \vdash u : p}{\Delta \vdash (t \ u) : q} \text{ (E}\Rightarrow\text{)}$$

On obtient des temoins de preuves de la forme

$$t, u, v = x \mid \lambda x^p. t \mid (t \ u)$$

Equivalence de Curry Howard

Elimination des coupures et β – *reduction*

$$\frac{\frac{\Delta, x : p \vdash t : q}{\Delta \vdash \lambda x :^p t.p \Rightarrow q} \quad \Delta \vdash u : p}{\Delta \vdash (\lambda x^p.t u) : q} \rightarrow \Delta \vdash t' : q$$

$$t' \equiv t\langle u/x \rangle$$

$$(\lambda x^p.t u) \rightarrow_{\beta} t\langle u/x \rangle$$

Equivalence de Curry Howard...

... expliquée en un tableau

logique en deduction naturelle	λ – <i>calcul</i> a la Church
formule	type
derivation	λ – <i>terme</i>
conclusion	type du terme
regle hypothese	variable
introduction de \Rightarrow	λ – <i>abstraction</i>
elimination de \Rightarrow	application
coupure (sur \Rightarrow)	β – <i>redex</i>

Equivalence de Curry Howard

Propriete fondamentale

Theoreme

Si $\Delta \vdash t : p$ alors t est confluent et fortement normalisant

Forme des formes normales

Elles sont engendrees par la grammaire

$$n := x \mid \lambda^p . n \mid (x \ n_1 \ \dots \ n_k)$$

Plan

Isomorphisme classique de Curry-Howard

L'isomorphisme lineaire de Curry Howard

La logique intuitionniste lineaire

Le λ - *calcul* lineaire

L'isomorphisme lineaire de Curry-Howard

Interpretation

La logique intuitionniste lineaire

- ▶ On a vu en cours la logique intuitionniste classique
- ▶ La logique lineaire intuitionniste a les memes regles sauf que l'on s'autorise une seule formule a droite du sequent dans les regles

La logique intuitionniste lineaire

Les regles

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{A \vdash A} \textit{Axiom} \\
 \\
 \frac{}{\vdash I} \textit{I}_I \qquad \frac{\Lambda \vdash I \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma, \Lambda \vdash A} \textit{I}_E \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \otimes_I \qquad \frac{\Lambda \vdash A \otimes B \quad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, \Lambda \vdash C} \otimes_E \\
 \\
 \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \multimap_I \qquad \frac{\Lambda \vdash A \multimap B \quad \Delta \vdash A}{\Lambda, \Delta \vdash B} \multimap_E \\
 \\
 \frac{\Gamma_1 \vdash !A_1, \dots, \Gamma_n \vdash !A_n \quad !A_1, \dots, !A_n \vdash B}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash !B} \textit{Prom.} \qquad \frac{\Lambda \vdash !B}{\Lambda \vdash B} \textit{Dereliction} \\
 \\
 \frac{\Lambda \vdash !A \quad \Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, \Lambda \vdash B} \textit{Contraction} \\
 \\
 \frac{\Lambda \vdash !A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma, \Lambda \vdash B} \textit{Weakening} \\
 \\
 \frac{\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash 1} 1_I \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \&_I \qquad \frac{\Lambda \vdash A \& B}{\Lambda \vdash A} \&_{E1} \quad \frac{\Lambda \vdash A \& B}{\Lambda \vdash B} \&_{E2} \\
 \\
 \frac{\Gamma_1 \vdash A_1, \dots, \Gamma_n \vdash A_n \quad \Lambda \vdash 0}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Lambda \vdash C} 0_E \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus_{I1} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus_{I2} \quad \frac{\Lambda \vdash A \oplus B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Lambda \vdash C} \oplus_E
 \end{array}$$

Le λ – *calcul* lineaire

Les types

- ▶ Ils sont donnes par la grammaire suivante :

$$s ::= I \mid s \otimes s \mid s \multimap s \mid !s$$

Le λ – *calcul* linéaire

Les termes

- ▶ Ils sont donnés par la grammaire suivante :

$t ::= x \mid * \mid \textit{let } t \textit{ be } * \textit{ in } t \mid t \otimes t \mid$

$\textit{let } t \textit{ be } x \otimes y \textit{ in } t \mid \lambda^A.t \mid t t \mid \textit{promote } t, \dots, t \textit{ for } x_1, \dots, x_n \textit{ in } t \mid$

$\textit{derelict}(t) \mid \textit{discard } t \textit{ in } t \mid \textit{copy } t \textit{ as } x, y \textit{ in } t$

Le λ – calcul linéaire

Les variables libres

- ▶ Pour un terme u , on définit $FV(u)$ par induction comme suit :
 - ▶ $FV(x) = \{x\}$
 - ▶ $FV(*) = \emptyset$
 - ▶ $FV(\text{let } w \text{ be } * \text{ in } u) = FV(w) \cup FV(u)$
 - ▶ $FV(u \otimes v) = FV(u) \cup FV(v)$
 - ▶ $FV(\text{let } w \text{ be } x \otimes y \text{ in } u) = FV(w) \cup FV(u) - \{x, y\}$
 - ▶ $FV(\lambda x. u) = FV(u) - \{x\}$
 - ▶ $FV(f \ u) = FV(f) \cup FV(u)$
 - ▶ $FV(\text{promote } v_1, \dots, v_n \text{ for } x_1, \dots, x_n \text{ in } u) = FV(v_1) \cup \dots \cup FV(v_n) \cup FV(u)$
 - ▶ $FV(\text{derelict}(u)) = FV(u)$
 - ▶ $FV(\text{discard } w \text{ in } u) = FV(w) \cup FV(u)$
 - ▶ $FV(\text{copy } w \text{ as } x, y \text{ in } u) = FV(w) \cup FV(u) - \{x, y\}$

Le λ – calcul linéaire

Les règles de typage

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$
$$\frac{\Gamma, x : A, y : B, \Delta \vdash u : C}{\Gamma, y : B, x : A, \Delta \vdash u : C}$$
$$\frac{}{\vdash * : I} \quad \frac{\Lambda \vdash w : I \quad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma, \Lambda \vdash \text{let } w \text{ be } * \text{ in } u : A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Delta \vdash v : B}{\Gamma, \Delta \vdash u \otimes v : A \otimes B} \quad \frac{\Lambda \vdash w : A \otimes B \quad \Gamma, x : A, y : B \vdash u : C}{\Gamma, \Lambda \vdash \text{let } w \text{ be } x \otimes y \text{ in } u : C}$$
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A. u : A \multimap B} \quad \frac{\Lambda \vdash f : A \multimap B \quad \Delta \vdash u : A}{\Lambda, \Delta \vdash fu : B}$$
$$\frac{\Gamma_1 \vdash v_1 : !A_1, \dots, \Gamma_n \vdash v_n : !A_n \quad x_1 : !A_1, \dots, x_n : !A_n \vdash u : B}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash \text{promote } v_1, \dots, v_n \text{ for } x_1, \dots, x_n \text{ in } u : !B}$$
$$\frac{\Lambda \vdash u : !B}{\Lambda \vdash \text{derelict}(u) : B}$$
$$\frac{\Lambda \vdash w : !A \quad \Gamma, x : !A, y : !A \vdash u : B}{\Gamma, \Lambda \vdash \text{copy } w \text{ as } x, y \text{ in } u : B} \quad \frac{\Lambda \vdash w : !A \quad \Gamma \vdash u : B}{\Gamma, \Lambda \vdash \text{discard } w \text{ in } u : B}$$

Le λ – calcul linéaire

Les règles de typage

$$\frac{}{x : A \vdash x : A}$$

$$\frac{}{\vdash * : I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Delta \vdash v : B}{\Gamma, \Delta \vdash u \otimes v : A \otimes B}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A. u : A \multimap B}$$

$$\frac{}{A \vdash A} \textit{Axiom}$$

$$\frac{}{\vdash I} I_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \otimes_I$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \multimap_I$$



$$\frac{\Gamma_1 \vdash v_1 : !A_1, \dots, \Gamma_n \vdash v_n : !A_n \quad x_1 : !A_1, \dots, x_n : !A_n \vdash u : B}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash \textit{promote } v_1, \dots, v_n \textit{ for } x_1, \dots, x_n \textit{ in } u : B}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash !A_1, \dots, \Gamma_n \vdash !A_n \quad !A_1, \dots, !A_n \vdash B}{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \vdash B} \textit{Prom.}$$

Le λ – *calcul* linéaire

Quelques notations

- ▶ copy w_1 as x_1, y_1 in (...copy w_n as x_n, y_n in u ...) \rightarrow copy \bar{w} as \bar{x}, \bar{y} in u
- ▶ discard w_1 in (... discard w_n in u ...) \rightarrow discard \bar{w} in u

Le λ – *calcul* linéaire

Les règles de β – *reduction*

$$\text{let } * \text{ be } * \text{ in } u \rightsquigarrow u$$

$$u \otimes v \text{ be } x \otimes y \text{ in } w \rightsquigarrow w[u, v/x, y]$$

$$(\lambda x.u)w \rightsquigarrow u[w/x]$$

$$\text{derelict}(\text{promote } \bar{w} \text{ for } \bar{x} \text{ in } u) \rightsquigarrow v[\bar{w}/\bar{x}]$$

$$\text{discard}(\text{promote } \bar{w} \text{ for } \bar{x} \text{ in } u) \text{ in } v \rightsquigarrow \text{discard } \bar{w} \text{ in } v$$

$$\text{copy}(\text{promote } \bar{w} \text{ for } \bar{x} \text{ in } u) \text{ as } y, z \text{ in } v$$

\rightsquigarrow

$$\text{copy } \bar{w} \text{ as } \bar{x}', \bar{x}'' \text{ in } (v[\text{promote } \bar{x}' \text{ for } \bar{x} \text{ in } u, \text{promote } \bar{x}'' \text{ for } \bar{x} \text{ in } u/y, z])$$

Le λ – *calcul* linéaire

Les règles de β – *reduction*

let * be * in $u \rightsquigarrow u$

$$\frac{\Lambda \vdash I \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma, \Lambda \vdash A} I_E$$

$u \otimes v$ be $x \otimes y$ in $w \rightsquigarrow w[u, v/x, y]$

$$\frac{\Lambda \vdash A \otimes B \quad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, \Lambda \vdash C} \otimes_E$$

$(\lambda x.u)w \rightsquigarrow u[w/x]$

$$\frac{\Lambda \vdash A \multimap B \quad \Delta \vdash A}{\Lambda, \Delta \vdash B} \multimap_E$$

derelict(promote \bar{w} for \bar{x} in u) $\rightsquigarrow v[\bar{w}/\bar{x}]$

$$\frac{\Lambda \vdash !B}{\Lambda \vdash B} \text{Dereliction}$$

Le λ – *calcul* lineaire

Proprietes

Prop

$$x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n \vdash u : A \Rightarrow FV(u) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

Ce qui n'est pas toujours vrai en λ – *calcul*...

- ▶ N. Benton. a montre que le λ – *calcul* lineaire est fortement normalise et verifie la propriete de Church-Rosser (en utilisant une reduction conservant des bonnes proprietes dans le systeme F) (1993)
- ▶ Avec le lemme de Konig, cela implique que tous les termes sont bornes

L'isomorphisme de Curry-Howard

- ▶ Il relie le λ – *calcul* lineaire a la logique intuitioniste lineaire
- ▶ Construction tres symetrique a l'isomorphisme de CH entre le lambda calcul et la logique intuitioniste

L'isomorphisme de Curry-Howard

- ▶ Que signifie $A \multimap B$?
 - ▶ On peut prouver B en utilisant A une seule fois...
 - ▶ Et pour un programme?
 - ▶ P est de type $A \multimap B$ si P prend une entrée de type A une seule fois, et rend quelqu'un de type B (on peut dire qu'il consomme son entrée lors du calcul)
- ▶ Et \bar{A} ?
 - ▶ En preuve?
 - ▶ Un programme P de type \bar{A} utilise linéairement son entrée