Logique floue

15 Février 2010

Plan

Degrés de vérité

- Logique classique : Soit il fait froid, soit il fait pas froid.

Degrés de vérité

- Logique classique : Soit il fait froid, soit il fait pas froid.
- Logique intuitionniste : On ne peut pas prouver qu'il fasse froid ou qu'il fasse pas froid.

Degrés de vérité

- Logique classique : Soit il fait froid, soit il fait pas froid.
- Logique intuitionniste : On ne peut pas prouver qu'il fasse froid ou qu'il fasse pas froid.
- Logique floue : Soit il fait froid, soit il ne fait pas froid, soit il fait un peu froid.

avec "un peu" entre 0 et 1.

Soit $A(t)$ fonction de la température t qui indique si t est froid ou non.

- $A(t) = 1$ si $t \leq t_1$ avec t_1 donné.
- $A(t) = 0$ si $t \leq t_2$ avec $t_2 > t_1$.
- A décroissant et continu entre t_1 et t_2.

Pourquoi flouter ?

- Existence de températures définitivement froides.
- Existence de températures définitivement pas froides.
- Ces deux ensembles ne sont pas contigus.

Rapport avec les probabilités

- Probabilités : Il fait froid avec une probabilité de 0.5.
- Logique Linéaire : Il fait froid avec une valeur de 0.5.

Rapport avec les probabilités

- Probabilités : Il fait froid avec une probabilité de 0.5.
- Logique Linéaire : Il fait froid avec une valeur de 0.5.

- Probabilités : On ne connaît pas la valeur.

Rapport avec les probabilités

- Probabilités : Il fait froid avec une probabilité de 0.5.
- Logique Linéaire : Il fait froid avec une valeur de 0.5.

- Probabilités : On ne connaît pas la valeur.
- Logique Linéaire : On connaît la valeur, et on la quantifie.

Rapport avec les probabilités

- Probabilités : Il fait froid avec une probabilité de 0.5.
- Logique Linéaire : Il fait froid avec une valeur de 0.5.

- Probabilités : On ne connaît pas la valeur.
- Logique Linéaire : On connaît la valeur, et on la quantifie.

Exemple des bouteilles.

Application

- A : Il fait froid dans la pièce.
- B : Je suis habillé chaudement.
- C : J'utilise la climatisation pour réchauffer la pièce.

A, B et C sont des variables floues. On pose

$$C = A \wedge (\neg(B))$$

Connecteurs logiques

1. NOT : $\neg(a) = 1 - a$
2. AND : $a \wedge b = \top(a, b)$
3. OR : $a \vee b = \perp(a, b)$

Définition

Fonction $\top$ de $[0, 1] * [0, 1]$ vers $[0, 1]$ qui vérifie :

1. Commutativité : $\top(a, b) = \top(b, a)$

Définition

Fonction $\top$ de $[0, 1] * [0, 1]$ vers $[0, 1]$ qui vérifie :

1. Commutativité : $\top(a, b) = \top(b, a)$
2. Monotonicité : $\top(a, b) \leq \top(c, d)$ si $a \leq c$ et $b \leq d$

Définition

Fonction $\top$ de $[0,1] * [0,1]$ vers $[0,1]$ qui vérifie :

1. Commutativité : $\top(a,b) = \top(b,a)$
2. Monotonicité : $\top(a,b) \leq \top(c,d)$ si $a \leq c$ et $b \leq d$
3. Associativité : $\top(a,\top(b,c)) = \top(\top(a,b),c)$

Définition

Fonction $\top$ de $[0, 1] * [0, 1]$ vers $[0, 1]$ qui vérifie :

1. Commutativité : $\top(a, b) = \top(b, a)$
2. Monotonicité : $\top(a, b) \leq \top(c, d)$ si $a \leq c$ et $b \leq d$
3. Associativité : $\top(a, \top(b, c)) = \top(\top(a, b), c)$
4. Identité : $\top(1, a) = a$

Définition

Fonction $\top$ de $[0,1] * [0,1]$ vers $[0,1]$ qui vérifie :

1. Commutativité : $\top(a,b) = \top(b,a)$
2. Monotonicité : $\top(a,b) \leq \top(c,d)$ si $a \leq c$ et $b \leq d$
3. Associativité : $\top(a,\top(b,c)) = \top(\top(a,b),c)$
4. Identité : $\top(1,a) = a$

Notation : $*$

Continuité

- Nécessaire pour la logique floue.
- Idée intuitive : changements microscopiques sur les entrées n'induisent pas de changement macroscopique sur la sortie.

Archimèdicité

$\forall (x, y)$ dans $]0, 1[$ on a n tel que $x^n \leq y$.

Archimèdicité

$\forall(x, y)$ dans $]0, 1[$ on a n tel que $x^n \leq y$. Si on a cette condition :
Nilpotence $\leftrightarrow$ Il existe $x \neq 0$ nilpotent
$\top$ stricte : $\top$ non nilpotente.

Ordre

- partiel
- $\top_1 \leq \top_2$ si et seulement si $\top_1(a, b) \leq \top(a, b)$ pour tout (a, b) de $[0, 1]$
- $\top$ grande $\Leftrightarrow$ conjonction faible

Exemples

- Minimum : $\top(a, b) = \min(a, b)$
  Utilisée en logique floue pour des conjonctions faibles. Plus grande des $\top$-normes.

Exemples

- Minimum : $\top(a, b) = \min(a, b)$
  Utilisée en logique floue pour des conjonctions faibles. Plus grande des $\top$-normes.
- Produit : $\top(a, b) = a \cdot b$
  Utilisée en logique floue pour des conjonctions fortes. Stricte.

Exemples

- Minimum : $\top(a, b) = \min(a, b)$
  Utilisée en logique floue pour des conjonctions faibles. Plus grande des $\top$-normes.
- Produit : $\top(a, b) = a \cdot b$
  Utilisée en logique floue pour des conjonctions fortes. Stricte.
- Łukasiewicz : $\top(a, b) = \max(0, a + b - 1)$
  Nilpotente.

Exemples

- Minimum : $\top(a, b) = \min(a, b)$
  Utilisée en logique floue pour des conjonctions faibles. Plus grande des $\top$-normes.
- Produit : $\top(a, b) = a \cdot b$
  Utilisée en logique floue pour des conjonctions fortes. Stricte.
- Łukasiewicz : $\top(a, b) = \max(0, a + b - 1)$
  Nilpotente.
- Drastique : $\top(a, b) = b$ si $a = 1$, $\top(a, b) = a$ si $b = 1$, $\top(a, b) = 0$ sinon.
  Continue à droite, mais pas continue. Plus petite des $\top$-normes.

- Minimum nilpotent : $\top(a, b) = \min(a, b)$ si $a + b > 1$, $\top(a, b) = 0$ sinon.
  Continue à gauche, mais pas continue. Non nilpotente.

- Minimum nilpotent : $\top(a,b) = \min(a,b)$ si $a+b>1$,
  $\top(a,b)=0$ sinon.
  Continue à gauche, mais pas continue. Non nilpotente.
- Produit d'Hamacher : $\top(a,b)=0$ si $a=b=0$,
  $\top(a,b)=\frac{ab}{a+b-ab}$ sinon.
  Stricte. Utilisée dans des classes paramétriques de générateurs de $\top$-normes (nommément Hamacher et Schweiser-Sklar).

Implication

Soit $\top$ une $\top$-norme continue à gauche. Alors il existe une unique fonction $\Rightarrow$ telle que

$$\top(z, x) \leq y \leftrightarrow z \leq (x \Rightarrow y)$$

Egalement appelé résidu.

Implication

Soit $\top$ une $\top$-norme continue à gauche. Alors il existe une unique fonction $\Rightarrow$ telle que

$$\top(z, x) \leq y \leftrightarrow z \leq (x \Rightarrow y)$$

Egalement appelé résidu.
On a

$$x \Rightarrow y = \max\{z | \top(z, x) \leq y\}$$

Propriétés

- $x \Rightarrow y = 1$ si et seulement si $x \leq y$.

Propriétés

- $x \Rightarrow y = 1$ si et seulement si $x \leq y$.
- $(1 \Rightarrow y) \Rightarrow y$

Propriétés

- $x \Rightarrow y = 1$ si et seulement si $x \leq y$.
- $(1 \Rightarrow y) \Rightarrow y$
- $\min(x, y) \geq \top(x, (x \Rightarrow y))$ Egalité si $\top$ est continue.

Propriétés

- $x \Rightarrow y = 1$ si et seulement si $x \leq y$.
- $(1 \Rightarrow y) \Rightarrow y$
- $\min(x, y) \geq \top(x, (x \Rightarrow y))$ Egalité si $\top$ est continue.
- $\max(x, y) = \min((x \Rightarrow y) \Rightarrow y, (y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$

Exemples

On a $x \Rightarrow y = 1$ si $x \leq y$. Donc on suppose $x > y$. Valeurs de $x \Rightarrow y$ pour :

- Minimum : y
- Produit : $\frac{y}{x}$
- Łukasiewicz : $1 - x + y$
- Minimum nilpotent : $\max(1 - x, y)$

$\top$-conormes

Duale de la $\top$-norme.

$$\perp(a, b) = 1 - \top(1 - a, 1 - b)$$

Mêmes propriétés que pour $\top$:

1. Commutativité
2. Monotonicité
3. Associativité
4. Identité : $\perp(0, a) = a$

Exemples

- Minimum : Maximum
  $\perp(a, b) = \max(a, b)$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions faibles. Plus petite des $\top$-conormes.

Exemples

- Minimum : Maximum
  $\perp(a, b) = \max(a, b)$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions faibles. Plus petite des $\top$-conormes.
- Produit : Somme probabilistique
  $\perp(a, b) = a + b - a \cdot b$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions fortes.

Exemples

- Minimum : Maximum
  $\perp(a, b) = \max(a, b)$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions faibles. Plus petite des $\top$-conormes.
- Produit : Somme probabilistique
  $\perp(a, b) = a + b - a \cdot b$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions fortes.
- Łukasiewicz : Somme bornée
  $\perp(a, b) = \min(a + b, 1)$

Exemples

- Minimum : Maximum
  $\perp(a, b) = \max(a, b)$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions faibles. Plus petite des $\top$-conormes.
- Produit : Somme probabilistique
  $\perp(a, b) = a + b - a \cdot b$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions fortes.
- Łukasiewicz : Somme bornée
  $\perp(a, b) = \min(a + b, 1)$
- Drastique : Drastique
  $\perp(a, b) = b$ si $a = 0$, $\perp(a, b) = a$ si $b = 0$, $\perp(a, b) = 1$ sinon. Plus grande des $\top$-conormes.

Exemples

- Minimum : Maximum
  $\perp(a, b) = \max(a, b)$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions faibles. Plus petite des $\top$-conormes.
- Produit : Somme probabilistique
  $\perp(a, b) = a + b - a \cdot b$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions fortes.
- Łukasiewicz : Somme bornée
  $\perp(a, b) = \min(a + b, 1)$
- Drastique : Drastique
  $\perp(a, b) = b$ si $a = 0$, $\perp(a, b) = a$ si $b = 0$, $\perp(a, b) = 1$ sinon. Plus grande des $\top$-conormes.
- Minimum nilpotent : Maximum nilpotent
  $\perp(a, b) = \max(a, b)$ si $a + b < 1$, $\perp(a, b) = 1$ sinon.

Exemples

- Minimum : Maximum
  $\perp(a,b) = \max(a,b)$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions faibles. Plus petite des $\top$-conormes.
- Produit : Somme probabilistique
  $\perp(a,b) = a + b - a \cdot b$ Utilisée en logique floue pour des disjonctions fortes.
- Łukasiewicz : Somme bornée
  $\perp(a,b) = \min(a+b, 1)$
- Drastique : Drastique
  $\perp(a,b) = b$ si $a = 0$, $\perp(a,b) = a$ si $b = 0$, $\perp(a,b) = 1$ sinon. Plus grande des $\top$-conormes.
- Minimum nilpotent : Maximum nilpotent
  $\perp(a,b) = \max(a,b)$ si $a + b < 1$, $\perp(a,b) = 1$ sinon.
- Hamacher : Somme d'Einstein
  $\perp(a,b) = \frac{a+b}{1+ab}$

Propriétés

Elément nul

Pour tout a de $[0, 1]$:

- $\top(0, 1) = 0$
- $\perp(1, a) = 1$

Propriétés

Elément nul

Pour tout a de $[0,1]$:

- $\top(0,1) = 0$
- $\perp(1,a) = 1$

Distribution

- $\top(x, \perp(y,z)) = \perp(\top(x,y), \top(x,z))$ pour tous x, y et z si et seulement si $\perp$ est la $\perp$-conorme Maximum.
- $\perp(x, \top(y,z)) = \top(\perp(x,y), \perp(x,z))$ pour tous x, y et z si et seulement si $\top$ est la $\top$-conorme Minimum.

Conclusion

La logique floue permet d'opérer sur des éléments dont les états ne sont pas binaires.