Master 2 2010/11 : 5/01/11

Espaces projectifs et espaces affines

1. Définir la catégorie des sous-espaces affines. Expliciter le statut du vide.
2. Peut-on, dans la définition précédente, restreindre au maximum l'espace vectoriel ambiant ?
3. Définir soigneusement le foncteur "oubli de l'ambiant" de la catégorie des sous-espaces affines dans celle des espaces affines.
4. Ce foncteur est-il un isomorphisme ou une équivalence ?
5. Définir une notion (catégorie) d'espaces affines à base de barycentres. Discuter les axiomes à imposer au barycentre.
6. Relier les catégories précédentes par des équivalences.
7. Définir une notion (catégorie) d'espaces affines à base de structure (non unique) d'espace vectoriel. Discuter les axiomes à imposer.
8. Définir une notion (catégorie) d'espaces affines à base de fonctions affines. Discuter les axiomes à imposer.
9. Relier les catégories précédentes par des équivalences.
10. Définir une catégorie dont les objets sont les espaces projectifs munis d'un hyperplan.
11. Construire un foncteur "complémentaire" de votre catégorie dans celle des espaces affines.
12. Ce foncteur est-il un isomorphisme ou une équivalence ?
13. Etant donnés deux hyperplans H et K dans un espace projectif P, quelle est la dimension de l'espace vectoriel noté $H^0(P, \mathcal{O}(H-K))$ des fonctions affines sur le complémentaire de H qui s'annule sur K ? Cas où $H = K$.
14. Si H, K, et L sont trois hyperplans, montrer comment $H^0(P, \mathcal{O}(H-K))$, $H^0(P, \mathcal{O}(K-L))$ et $H^0(P, \mathcal{O}(H-L))$ sont reliés par la multiplication. Que se passe-t-il si $H = L$?
15. On note $H^0(P, \mathcal{O}(H))$ ou simplement $H^0(\mathcal{O}(H))$ l'espace vectoriel des fonctions affines sur le complémentaire de H. Montrer comment la multiplication par un élément de $H^0(P, \mathcal{O}(H-K))$ induit un isomorphisme entre $H^0(\mathcal{O}(H))$ et $H^0(\mathcal{O}(K))$. Montrer que ces isomorphismes forment un groupoïde.
16. Construire une notion d'espace projectif à base d'hyperplans et de structure affine sur les complémentaires. Relier cette catégorie à la standard par une équivalence.
17. Construire une notion d'espace projectif à partir d'un groupoïde d'espaces vectoriels vérifiant la condition appropriée.