

Espaces projectifs

1. Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur le corps F_q à q éléments. Calculer le cardinal de $P(E)$.
2. Montrer que par deux points distincts de $P(E)$ passe une unique droite.
3. Montrer qu'une partie de $P(E)$ est une sous-variété linéaire ssi avec deux points distincts, elle contient la droite qui les joint.
4. Montrer que toute intersection de sous-variétés linéaires est une sous-variété linéaire. Est-ce que si la réunion de deux sous-variétés linéaires est une sous-variété linéaire, alors l'une contient l'autre ?
5. Discutez la dimension de la sous-variété linéaire engendrée par la réunion de deux droites, de trois droites, dans un espace projectif.
6. A étant un ensemble, on sait en quel sens l'assignation $X \mapsto X^A$ est un foncteur F_A . Pour a élément de A , montrer que l'évaluation en a est une transformation naturelle de F_A vers l'identité.
7. Montrer que toute sous-variété linéaire de codimension d est l'intersection de d hyperplans.
8. On considère deux bases de E et on suppose que tout point de $P(E)$ a les mêmes systèmes de coordonnées homogènes dans ces deux bases. Montrer que ces deux bases sont proportionnelles.
9. Montrez dans un espace projectif de dimension n , tout système libre est contenu dans un système libre et générateur ; tout système générateur contient un système libre et générateur ; tout système libre et générateur comporte $n + 1$ points ; tout système libre de $n + 1$ points est générateur ; tout système générateur de $n + 1$ points est libre.
10. Calculer le nombre de repères projectifs et le nombre de droites dans un espace projectif de dimension finie sur un corps fini.
11. Montrer que les translations non nulles sur le complémentaire de l'hyperplan H sont les restrictions des homographies de P dont l'ensemble des points fixes est H .
12. a) Montrer qu'étant données deux configurations de quatre droites du plan projectif trois à trois non concourantes, il existe une homographie envoyant l'une sur l'autre.
b) Plus généralement, trouvez toutes les orbites de l'action de $PGL(3)$ sur l'ensemble des configurations de quatre droites.