

Catégories et ordres

1. La catégorie des formules

(a) Occurrences

Dans notre cas, une occurrence est une suite finie (éventuellement vide) de 1 et/ou de 2. Pour chaque formule A de MALL, on définit son ensemble d'occurrences $Occ(A)$ par récurrence sur la structure de A :

si A est une constante, $Occ(A)$ est réduit à la seule occurrence vide; si A est de la forme $C + D$, où $+$ est l'un de nos quatre connecteurs binaires, alors on pose

$$Occ(A) := \{1.c | c \in Occ(B)\} \cup \{2.c | c \in Occ(B)\}.$$

Calculer $Occ(A)$ pour $A := (1 \otimes (\perp \oplus 0)) \oplus (((\perp \otimes (\perp \& 0)) \oplus 1) \otimes (\perp \& 0))$.

(b) Sous-formules

Pour une formule A et une occurrence $o \in Occ(A)$, on définit la sous-formule associée $Occ(A, o)$ par récurrence:

si o est vide, $Occ(A, o) := A$

si $o = 1.o'$, alors on a $A = B + C$ et on pose $Occ(A, o) := Occ(B, o')$ et

si $o = 2.o'$, alors on a $A = B + C$ et on pose $Occ(A, o) := Occ(C, o')$.

(c) Morphismes

On définit l'ensemble des morphismes de la formule A vers la formule B comme l'ensemble des occurrences o de B vérifiant $Occ(B, o) = A$.

Quels sont les morphismes de $A := \perp \& 0$ vers $B := (1 \otimes (\perp \oplus 0)) \oplus (((\perp \otimes (\perp \& 0)) \oplus 1) \otimes (\perp \& 0))$, et de B vers A ?

(d) Composition

On définit le composé $o \circ o'$ de deux morphismes $o : B \rightarrow C$ et $o' : A \rightarrow B$ comme la concaténation des deux suites, $o'.o$. Montrer que ce composé est un morphisme. Montrer que cette composition est associative.

(e) La catégorie

Compléter ces données en une catégorie. Cette catégorie admet-elle un objet initial? final? des produits? Montrer comment la négation est un foncteur.

2. Ordres

- (a) On définit la relation \leq sur l'ensemble des formules en convenant que $A \leq B$ signifie que A est une sous-formule de B . Montrer que c'est une relation d'ordre bien fondé.
- (b) Soit E un ensemble. Rappeler comment on ordonne l'ensemble $P_f(E)$ des parties finies de E .
- (c) On suppose maintenant E ordonné et on définit sur $P_f(E)$ une nouvelle relation \leq en convenant que $p \leq q$ signifie qu'il existe une application $m : p \rightarrow q$ vérifiant $\forall x \in p, x \leq m(x)$ et $\forall x, y \in p, x = m(x) = m(y) \Rightarrow x = y$. Montrer que \leq est une relation d'ordre. Montrer que si l'ordre sur E est bien fondé, il en est de même pour \leq .
- (d) Soit E un ensemble. On appelle multi-partie sur E toute fonction $m : E \rightarrow \mathbf{N}$, et support de la multi-partie m l'ensemble des éléments de E où m n'est pas nulle. On dit que la multi-partie m est finie si son support l'est. On note $MP_f(E)$ l'ensemble des multi-parties finies de E .
Définir un ordre bien fondé facile sur l'ensemble des multi-parties finies d'un ensemble donné.
- (e) On suppose maintenant que E est lui-même ordonné, et on veut définir sur $MP_f(E)$ un ordre plus subtil. Pour $m \in MP_f(E)$ et $c \in E$, on convient d'écrire $m < x$ pour dire que tous les éléments du support de m sont strictement majorés par x . Montrer qu'il existe une plus petite relation d'ordre \leq sur $MP_f(E)$ vérifiant $\forall m \in MP_f(E), \forall x \in E, m > x \Rightarrow m \leq \{x\}$ et $\forall m, m', a \in MP_f(E), m \leq m' \Rightarrow m + a \leq m' + a$.
- (f) Montrer que si l'ordre sur E est bien fondé, l'ordre précédent \leq sur $MP_f(E)$ l'est aussi.
- (g) Associer à tout séquent un élément de $MP_f(MALL)$ et à toute position p du jeu $MALL$ un élément $h(p)$ de $MP_f(MP_f(MALL))$.
- (h) Montrer que si un coup actif de $MALL$ transforme la position p en la position q , on a $h(q) \leq h(p)$.

3. Pour mémoire

- dire qui gagne les petites formules
- montrer l'anodinité.