Master2 LL2011/2012: 02/02/2012

Preuves classiques

On se place dans une théorie où la réunion et l'intersection sont données avec leur propriété caractéristiques.

1. Prouver que le vide est neutre pour la réunion et absorbant pour l'intersection.
2. Prouver que tout ensemble est égal à son auto-intersection et à son auto-réunion.
3. Prouver la distributivité de la réunion sur l'intersection.
4. Prouver que dans l'ensemble des parties d'un ensemble, le passage au complémentaire est décroissant.
5. Prouver que si une fonction continue sur $\mathbf{R}$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$ en $+\infty$, alors elle est surjective.
6. Prouver qu'une composée d'applications injectives (resp.surjectives) est injective (resp. surjective).
7. Prouver la régularité à droite ou à gauche des injections et des surjections.
8. Prouver que l'image d'une réunionn est la réunion des images. Et pour l'intersection?
9. Prouver que l'image réciproque d'une intersection est l'intersection des images réciproques.
10. Convertir le texte suivant en preuve formelle.

    L'image d'une intersection est contenue dans l'intersection des images.

    Preuve. Soient f une application de A dans B et P et Q deux parties de A. Considérons un élément y quelconque de $f(P \cap Q)$. On peut choisir un antécédent x de y dans $P \cap Q$. Comme son antécédent x est dans P, y est dans $f(P)$, et comme x est aussi dans Q, y est dans $f(Q)$.
11. Prouver que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
12. Prouver que le noyau (resp. l'image) d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.