

# Exponentielles et autres

## 1. Unités

Donnez un sens à la phrase “1 est l’unité pour  $\otimes$ ” et prouver votre énoncé. Même chose pour les autres unités.

## 2. La règle exponentielle

Prouver que  $!(A \& B)$  et  $!A \otimes !B$  sont linéairement équivalents.

## 3. Non prouvables

Prouvez non-prouvables :  $\vdash A \otimes \bar{A}, 1$  et aussi

$\vdash A \oplus \bar{A} \quad A \multimap B, B \multimap A, A \vdash B \quad A \wp A \vdash A \otimes A \quad A \multimap B, B \multimap A, A \wp B \vdash A \otimes B.$

## 4. Prouvable ou non prouvable?

$A \multimap B, B \multimap A, A \vdash B$

$A \multimap !A \quad A \multimap ?A \quad !A \multimap ?A \quad ?A \multimap !A \quad ??A \multimap A \quad (!A \oplus ?A) \multimap A$

$(!A \& ?A) \multimap A \quad (!A \otimes ?A) \multimap A \quad A \multimap (!A \& ?A) \quad (A \multimap B) \multimap !A \multimap !B$

$(A \multimap B) \multimap !A \multimap ?B \quad !(A \multimap B) \multimap !A \multimap !B \quad (A \multimap !B) \multimap !A \multimap !B$

$\wp^n A \multimap (\perp \oplus (A \wp ?A)) \quad ?A \multimap (\perp \oplus (A \wp ?A)) \quad !A \multimap B, !B \multimap A, !A \vdash !B.$

## 5. Contractions

a) Prouver  $?(A \oplus A^\perp)$ .

b) Dans quelle mesure cette formule a-t-elle des preuves distinctes?

c) Montrer qu’on ne peut pas prouver cette formule sans contraction.

## 6. Empilements exponentiels

a) Faire le graphe des implications linéaires entre les formules

$!!A \quad !?A \quad ?!A \quad ??A.$

b) Même choses avec trois exponentielles au lieu de deux. Et avec plus?

## 7. Exponentielles clonées

On considère le système LL enrichi avec deux nouvelles exponentielles  $!’$  et  $?’$ , et les quatre règles correspondantes. Montrer que, dans ce système, les nouvelles exponentielles ne sont pas équivalentes aux anciennes. Comment changer le système pour qu’elles le deviennent?