

# Exponentielles et autres

## 1. Tautologies

Prouvable ou non prouvable?

$$\begin{aligned}
 & A \multimap !A \quad A \multimap ?A \quad !A \multimap ?A \quad ?A \multimap !A \quad ??A \multimap A \quad (!A \oplus ?A) \multimap A \\
 & (!A \& ?A) \multimap A \quad (!A \otimes ?A) \multimap A \quad A \multimap (!A \& ?A) \quad (A \multimap B) \multimap !A \multimap !B \\
 & (A \multimap B) \multimap !A \multimap ?B \quad !(A \multimap B) \multimap !A \multimap !B \quad (A \multimap !B) \multimap !A \multimap !B \\
 & \wp^n A \multimap (\perp \oplus (A \wp ?A)) \quad ?A \multimap (\perp \oplus (A \wp ?A)).
 \end{aligned}$$

## 2. Contractions

- Prouver  $?(A \oplus A^\perp)$ .
- Dans quelle mesure cette formule a-t-elle des preuves distinctes?
- Montrer qu'on ne peut pas prouver cette formule sans contraction.

## 3. Empilements exponentiels

- Faire le graphe des implications linéaires entre les formules  $!!A \quad !?A \quad ?!A \quad ??A$ .
- Même choses avec trois exponentielles au lieu de deux. Et avec plus?

## 4. Exponentielles clonées

On considère le système LL enrichi avec deux nouvelles exponentielles  $!$  et  $?$ , et les quatre règles correspondantes. Montrer que, dans ce système, les nouvelles exponentielles ne sont pas équivalentes aux anciennes. Comment changer le système pour qu'elles le deviennent?

## 5. Morphismes d'arbres

- Rappeler la définition de morphisme entre deux arbres bipartites.
- On dit qu'un morphisme est bijectif si ses deux composantes le sont. Montrer qu'un morphisme est un isomorphisme si et seulement s'il est bijectif.
- Montrer que deux arbres bipartites isomorphes ont les mêmes nombres de sommets.
- Montrer que deux arbres bipartites à  $2 + 2$  sommets sont isomorphes.
- On note  $Z$  (à cause de la forme) un arbre bipartite à  $2 + 2$  sommets. Trouver tous les morphismes de  $Z$  dans  $Z$ .