Exam

1. Quelle est l'unité pour l'opération $⅋$? Explicitez ce que ça signifie et prouvez-le.

2. Est-ce que $?(A \oplus B)$ et $?A ⅋ ?B$ sont linéairement équivalents? Justifiez.

3. Prouvable ou non-prouvable? Justifier.
   $!A \oplus !\overline{A}$ $\qquad ?A \multimap (\bot \oplus (A ⅋ ?A))$ $\qquad ?((A \oplus B) \oplus (\overline{A} \otimes \overline{B}))$.

4. (a) On appelle ici **occurrence** toute suite finie (éventuellement vide) de 1 et/ou de 2. Pour chaque formule A de MALL, on définit son ensemble d'occurrences $Occ(A)$ par récurrence sur la structure de A:

   si A est une constante, $Occ(A)$ est réduit à la seule occurrence vide; si A est de la forme $C + D$, où $+$ est l'un de nos quatre connecteurs binaires, alors on pose

   $$Occ(A) := \{1.c | c \in Occ(C)\} \cup \{2.c | c \in Occ(D)\}.$$

   Calculer $Occ(A)$ pour $A := (1 \otimes (\bot \oplus 0)) \oplus (((\bot \otimes (\bot \& 0)) \oplus 1) \otimes (\bot \& 0))$.

   (b) Pour une formule A et une occurence $o \in Occ(A)$, on définit la sous-formule associée $Occ(A, o)$ par récurrence:

   si o est vide, $Occ(A, o) := A$

   si $o = 1.o'$, alors on a $A = B + C$ et on pose $Occ(A, o) := Occ(B, o')$ et

   si $o = 2.o'$, alors on a $A = B + C$ et on pose $Occ(A, o) := Occ(C, o')$.

   (c) On définit l'ensemble des morphismes de la formule A vers la formule B comme l'ensemble des occurrences o de B vérifiant $Occ(B, o) = A$.

   Quels sont les morphismes de $A := \bot \& 0$ vers

   $B := (1 \otimes (\bot \oplus 0)) \oplus (((\bot \otimes (\bot \& 0)) \oplus 1) \otimes (\bot \& 0))$, et de B vers A?

   (d) On définit le composé $o \circ o'$ de deux morphismes $o : B \to C$ et $o' : A \to B$ comme la concaténation des deux suites, $o.o'$. Montrer que ce composé est un morphisme. Montrer que ça fait une catégoire et que la négation est un foncteur.

5. Expliquez la traduction de la logique intuitionniste en LL.