

# Dessine-moi une intégrale

## 1. Dessiner une intégrale

Dessiner  $\int_2^3 \ln x dx$ ,  $\int_4^5 \sin x dx$ ,  $\int_0^3 \cos x dx$ ,  $\int_{-\infty}^{\pi} e^{-x^2} dx$ ,  $\int_0^1 \ln x dx$ .

## 2. Approcher une intégrale par la méthode des trapèzes

a) Calculer une approximation de  $\ln 2 := \int_1^2 \frac{dx}{x}$  par une méthode à deux trapèzes. Faire un dessin.

b) Calculer une approximation de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  par une méthode à trois trapèzes. Faire un dessin.

## 3. Encadrer une intégrale par une méthode de rectangles

a) Encadrer  $\ln 2 := \int_1^2 \frac{dx}{x}$  par une méthode à quatre rectangles. Faire un dessin.

b) Encadrer  $1 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$  par une méthode à trois rectangles. Faire un dessin.

c) Encadrer  $\int_1^7 \ln x dx$  par une méthode à six rectangles. Faire un dessin.

d) Encadrer  $\ln n := \int_1^n \frac{dx}{x}$  par une méthode à environ  $n$  rectangles.

e) Encadrer  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$  par deux intégrales qu'on calculera. Faire un dessin.

f) Minorer  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  par une intégrale qu'on calculera. Et alors?

## 4. Orienter une approximation par la méthode des trapèzes

a) Orienter une approximation de  $\int_1^2 e^{-x^2} dx$  par une méthode à deux trapèzes. Faire un dessin.

b) Orienter une approximation de  $\int_2^3 \cos x dx$  par une méthode à trois trapèzes. Faire un dessin.

## 5. Encadrer par la méthode des trapèzes

a) Encadrer  $\ln 2 := \int_2^4 \frac{dx}{x}$  par une méthode à quatre trapèzes. Faire un dessin.

b) Encadrer  $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$  par une méthode à deux trapèzes. Faire un dessin.

c) Si on approche  $\pi$  par l'aire d'un polygone régulier (inscrit) à  $n$  côtés, comment choisir  $n$  pour que l'erreur soit au plus de 0.01?

## 6. Godiller

Soit  $a$  un réel positif. Disons qu'un polynôme  $P$  est  $a$ -toyable si d'une part toutes ses dérivées en 0 et  $a$  (à commencer par  $P(0)$  et  $P(a)$ ) sont des entiers et d'autre part  $P[0, a]$  est contenu dans  $[0, 1/2[$ .

a) Soit  $P$  un polynôme  $\pi$ -toyable. Montrer que  $\int_0^{\pi} P(x) \sin x dx$  est un entier, que cet entier est zéro, et finalement que  $P$  est nul.

b) Soient  $p, q$  et  $n$  trois entiers positifs, et  $P_n(x) := x^n(p - qx)^n/n!$ . Montrer que  $P_n[0, p/q]$  est contenu dans  $[0, p^2n/n!]$ . En utilisant la formule de Leibniz, que vous aurez trouvée sur le web, montrer que, pour  $n$  assez grand,  $P_n$  est  $\frac{p}{q}$ -toyable.

c) Et après?