

Taylor

1. Calculer un polynôme de Taylor

Trouver le trinôme P du second degré vérifiant

$$P(2) = 2, P'(2) = -3, P''(2) = 4.$$

2. Proposer une approximation quadratique

Proposer une approximation quadratique intelligente pour $\sin 0.8$.

Mesurez avec votre calculatrice combien cette approximation est meilleure que l'approximation linéaire correspondante.

3. Encadrer une dérivée seconde

Encadrer la dérivée seconde: a) de la fonction \ln sur $[2.7, e]$

b) de la fonction \cos sur $[0.5, \frac{\pi}{6}]$

c) de la fonction \sin sur $[\frac{\pi}{4}, 0.8]$

d) de la fonction $\sqrt{\quad}$ sur $[8.98, 9]$

e) de la fonction $\sqrt[3]{\quad}$ sur $[8, 8.04]$.

4. Encadrer quadratiquement

Encadrer la dérivée seconde de \ln sur $[e, 3]$ et en déduire un encadrement de $\ln 3$.

5. Encadrer quadratiquement à reculons

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Encadrer f'' sur $[0.99, 1]$. En déduire un encadrement de $\sqrt{0.99}$ puis (en utilisant $99 = 9 \times 11$) de $\sqrt{11}$.

6. Contrôler une fonction avec Taylor

On donne une fonction f deux fois dérivable définie sur l'intervalle $[-1, 3]$, On suppose que f vérifie $f(-1) = 1, f'(-1) = -1, f(3) = 2, f'(3) = 1$, et $\frac{1}{3} \leq f'' \leq \frac{2}{3}$. Quels encadrements peut-on en déduire pour $f, \max f, \min f$ et $\int_{-1}^3 f(t)dt$? Faire un dessin.

7. Calculer la convexité

a) Trouver les intervalles maximaux de convexité et de concavité de la fonction

$$x \mapsto x^4 + 2x^3 - 12x^2 - ex + \pi.$$

b) Pour quelles valeurs du paramètre m la fonction $x \mapsto \cos 3x + mx^2$ est-elle convexe ?

c) Pour quelles valeurs du paramètre m la fonction $x \mapsto x^2 + e^x - m \sin 3x$ est-elle strictement convexe?