

# Taylor

## 1. Calculer un polynôme de Taylor

Trouver le polynôme  $P$  de degré 3 vérifiant

$$P(2) = 2, P'(2) = -3, P''(2) = 0, P'''(2) = -2.$$

## 2. Proposer une approximation quadratique

Proposer une approximation quadratique intelligente pour

a)  $\ln 2.7$       b)  $\cos 0.5$       c)  $\sin 0.8$       d)  $\sqrt{8.98}$       e)  $e^{\frac{\pi}{100}}$       f)  $\sqrt[3]{8.04}$ .

Dans quelle mesure cette approximation est-elle meilleure que l'approximation linéaire correspondante?

## 3. Encadrer une dérivée seconde

Encadrer la dérivée seconde: a) de la fonction  $\ln$  sur  $[2.7, e]$

b) de la fonction  $\cos$  sur  $[0.5, \frac{\pi}{6}]$       c) de la fonction  $\sin$  sur  $[\frac{\pi}{4}, 0.8]$

d) de la fonction  $\sqrt{\quad}$  sur  $[8.98, 9]$       e) de la fonction  $\sqrt[3]{\quad}$  sur  $[8, 8.04]$ .

## 4. Encadrer quadratiquement

Encadrer la dérivée seconde de  $\ln$  sur  $[e, 3]$  et en déduire un encadrement de  $\ln 3$ .

## 5. Encadrer quadratiquement à reculons

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$ . Encadrer  $f''$  sur  $[0.99, 1]$ . En déduire un encadrement de  $\sqrt{0.99}$  puis de  $\sqrt{11}$ .

## 6. Contrôler une fonction avec Taylor

On donne une fonction  $f$  deux fois dérivable définie sur l'intervalle  $[-1, 3]$ , On suppose que  $f$  vérifie  $f(-1) = 1, f'(-1) = -1, f(3) = 2, f'(3) = 1$ , et  $\frac{1}{3} \leq f'' \leq \frac{2}{3}$ . Quels encadrements peut-on en déduire pour  $f, \max f, \min f$  et  $\int_{-1}^3 f(t)dt$ ? Faire un dessin.

## 7. Détailler une démonstration

a) Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable définie sur  $[2, 5]$  et vérifiant  $f(2) = 0, f'(2) = 0$  et  $f'' \geq 0$ . Montrer que  $f$  est positive.

b) Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable définie sur  $[2, 5]$  et vérifiant  $f'' \geq m$ . On pose  $g := x \mapsto f(x) - f(2) - (x-2)f'(2) - m\frac{(x-2)^2}{2}$ . Calculer  $g(2), g'(2)$  et  $g''$ . Que peut-on en déduire sur  $f$ ?

c) Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable définie sur  $[2, 5]$  et vérifiant  $f'' \leq M$ . Montrer par la même méthode que, pour tout  $x$  entre 2 et 5, on a  $f(x) \leq f(2) + (x-2)f'(2) + M\frac{(x-2)^2}{2}$ .