Prépondérance et équivalence

1. Calculer la limite d'une fraction rationnelle:

Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+6x^3+1}{1+x^2-5x}$; $\lim_{x\to0} \frac{3x^3+x-6x^2}{x^2-x^3-x}$; $\lim_{x\to2} \frac{3x+6x^3}{x^3-4x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+6x^5-2+x}{x^5+3x^2-\pi}$.

2. Appliquer la règle de L'Hôpital:

Calculer $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-3}-1}$; $\lim_{x\to1} \frac{x^2+\cos\pi x}{\ln x}$; $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$.

3. Estimer l'approximation de Taylor:

Ici x est un réel tendant vers 0^+. Donner un équivalent simple des expressions suivantes:

$$\sin x - x, \quad \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, \quad (1+x)^e - 1 - ex, \quad e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

4. Reconnaître le terme dominant:

Ici x est un réel tendant vers 0^+. Donner un équivalent simple des expressions suivantes:

$$\pi x^3 + ex^2 - 7x, \quad 1000x\ln x - 0.1x^{0.01}, \quad x\ln x - \sqrt{x}, \quad \ln 3 - 0.1x^{0.01},$$

$$9e^x - 0.1x^{0.01}, \quad x^2\ln x - x(\ln x)^2, \quad \sqrt{x^3+2x^4} - \sqrt[3]{x^4+2x^5}, \quad \sin(1000x) - \sin^3 x.$$

5. Gérer les conflits entre dominants:

Ici x est un réel tendant vers 0^+. Donner un équivalent simple pour les expressions suivantes:

$$x + 2\sqrt{x^2+x^4}, \quad \sqrt{2x^2+x^3} + \sqrt{3x^2+x^4} - 5x, \quad \sqrt{x^2+x^3} - \sqrt{x^2+x^4}.$$

6. Calculer une limite:

Ici x est un réel tendant vers 0^+. Calculer la limite des expressions suivantes:

$$\frac{\sin x - x}{x^2}, \quad \frac{1-\cos x}{x^4}, \quad \frac{\ln(1+x) - x}{(1+x)^\pi - 1 - \pi x}.$$