

# Intégrales et aires

## 1. Dessiner une intégrale

Dessiner  $\int_2^3 \ln x dx$ ,  $\int_4^5 \sin x dx$ ,  $\int_0^3 \cos x dx$ ,  $\int_{-\infty}^{\pi} e^{-x^2} dx$ ,  $\int_0^1 \ln x dx$ .

## 2. Calculer un trapèze

Calculer, d'abord par intégration puis géométriquement,  $\int_1^6 (2 + 3x) dx$  et  $\int_1^6 (4 - x) dx$ .

## 3. Ramener un calcul d'aire à un calcul d'intégrale

Dessiner la région du plan définie par les inégalités suivantes et calculer son aire de deux façons :  
 $|x| < 2$  et  $|y| < 2$  et  $2x + 3y < 5$ ;  $2 < x < 4$  et  $x^3 y^2 = 64$ ;  $x > 0$  et  $y > 0$  et  $(y + 1)e^x < 3$ .

## 4. Calculer par changement de variables

a) Calculer  $\int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx$ .

b) Calculer  $\int_1^8 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$  en posant  $x = t^3$ .

c) Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt$  en posant  $x = \cos t$ .

## 5. Approcher une intégrale par la méthode des trapèzes

a) Calculer une approximation de  $\ln 2 := \int_1^2 \frac{dx}{x}$  par une méthode à deux trapèzes. Faire un dessin.

b) Calculer une approximation de  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  par une méthode à trois trapèzes. Faire un dessin.

## 6. Encadrer par la méthode des trapèzes

a) Encadrer  $\ln 2 := \int_2^4 \frac{dx}{x}$  par une méthode à quatre trapèzes. Faire un dessin.

b) Encadrer  $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx$  par une méthode à deux trapèzes. Faire un dessin.

## 7. Démontrer la formule fondamentale

a) En dessinant les rectangles correspondants, encadrer, pour  $x > 2$  puis pour  $1 < x < 2$  :

$$\frac{\int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^2 \frac{dt}{t}}{x - 2}.$$

b) Expliquer le rapport entre cet encadrement et l'inégalité de la moyenne, et avec la dérivée de  $\ln$  en 2.

c) Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbf{R}$ . On suppose que pour tout réel  $x$ , on a  $|f'(x)| \leq 3$ .

Dans la ligne de ce qui précède, expliquer pourquoi la dérivée de  $x \mapsto \int_e^x f(t) dt$  en  $\pi$  est  $f(\pi)$ .