

# Intégrales et aires

## 1. Calculer un trapèze

Calculer, d'abord par intégration puis géométriquement,  $\int_1^6 (2 + 3x)dx$  et  $\int_1^6 (4 - x)dx$ .

## 2. Démontrer la formule fondamentale

a) En utilisant des rectangles, encadrer, pour  $x > 2$  puis pour  $1 < x < 2$ :

$$\frac{\int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^2 \frac{dt}{t}}{x - 2}.$$

b) Expliquer le rapport entre cet encadrement et la dérivée de  $\ln$  en 2.

c) Soit  $f$  dérivable sur  $\mathbf{R}$ . On suppose que pour tout réel  $x$ , on a  $|f'(x)| \leq 3$ .

Dans la ligne de ce qui précède, expliquer pourquoi la dérivée de  $x \mapsto \int_e^x f(t)dt$  en  $\pi$  est  $f(\pi)$ .

## 3. Ramener un calcul d'aire à un calcul d'intégrale

Dessiner la région du plan définie par les inégalités suivantes et calculer son aire de deux façons:

$|x| < 2$  et  $|y| < 2$  et  $2x + 3y < 5$ ;  $2 < x < 4$  et  $x^3 y^2 = 64$ ;  $x > 0$  et  $y > 0$  et  $(y + 1)e^x < 3$ .

## 4. Ramener un calcul d'intégrale à un calcul d'aire

a) Démontrer géométriquement la formule  $\forall a > 0, \ln \frac{1}{a} = -\ln a$ .

b) En utilisant que la surface du cercle unité est  $\pi$ , calculer  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - t^2} dt$ .

## 5. Calculer la longueur d'une courbe

a) Calculer la longueur des polygones réguliers inscrits dans le (resp. circonscrits au) cercle unité.

b) Calculer par intégration la longueur du cercle unité.

c) Donner la formule intégrale pour la longueur de l'arc de la parabole d'équation  $y = x^2$  limité par les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

## 6. Calculer par changement de variables

a) Démontrer par changement de variable la formule  $\forall a > 0, \ln \frac{1}{a} = -\ln a$ , puis la formule  $\forall x, y \in \mathbf{R}, \ln xy = \ln x + \ln y$ .

b) Rappeler les formules pour  $\cos 2x$  et calculer  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - t^2} dt$  en faisant le changement de variable explicite  $t := \sin x$ .

c) Calculer  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$  en faisant le changement de variable implicite  $\sqrt{e^x - 1} = t$ .

d) Calculer  $\int_1^2 \frac{\ln s}{s^2} ds$  (poser  $s = e^t$ );  $\int_1^2 \frac{t+2}{\sqrt{5-t^2}} dt$  (poser  $t = \sqrt{5} \sin s$ );  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt$  (poser  $\cos t = x$ ).