Majorer, minorer, encadrer, arrondir

1. Arrondir dans le bon sens

a) Pour $x \in [e, \pi]$, montrez que $\frac{2x+\cos x}{3x-\sin x}$ est majoré par $\frac{2\pi+1}{3e-1}$. Utilisez votre calculatrice pour arrondir cette majoration dans le bon sens.

b) Pour $x \in [-2\pi, -\pi]$, montrez que $\frac{2x+\sin x}{3x+\sin x}$ est minoré par $\frac{2\pi-1}{6\pi+1}$. Utilisez votre calculatrice pour arrondir cette minoration dans le bon sens.

c) Pour $x \in [-\pi, \pi]$, majorer $\frac{2x^2+\sin x}{3x^2+\cos \frac{x}{4}}$ par un entier.

d) Pour $x \in [-e,\ -1[$, encadrer $\frac{ex^2+2\sin x}{\pi x^2+3\cos x}$ par deux nombres positifs à deux chiffres.

2. Encadrer un nombre par les accroissements finis

i) Encadrer la dérivée de ln sur $[2,\ e]$ et sur $[e,\ 3]$. Faire un dessin.
En déduire un encadrement de $\ln 2$ et $\ln 3$ (sachant $2.71 < e < 2.72$ et $0.367 < 1/e < 0.368$).

ii) Par la même méthode, encadrer

$a)\ln 2.71$ $\quad b)\cos 0.51$ $\quad c)\sin 0.79$ $\quad d)\sqrt[4]{15.98}$ $\quad e)e^{-0.002}$ $\quad f)\sqrt[3]{8.01}$

$e)(\ln 2.7)^3$ $\quad f)\cos 0.8 + 2\sin 0.8$ $\quad g)\sqrt{3.98} + e^{0.02}$ $\quad h)\sqrt[3]{8.04} + (1.97)^3$.

3. Distinguer extrema et bornes

a) Calculer les extrema (maximum et minimum) de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{x^2+8}$.

b) On considère une fonction h dont voici le TV.

x	$-\infty$		-5		-1		2		5		8		$+\infty$
			$+\infty$ 3				6				5 0		
$h(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	
	-2				-1				0				$-\infty$

Est-ce que h atteint ses bornes sur $[0, 1]$? sur $[6, 7[$? sur $]-e, e[$? Quelle question poseriez-vous pour décider si h atteint ses bornes sur $]0, 6[$?

c) (Difficile) Calculer les bornes de la fonction g définie par $g(x) = e^x + \cos x$.

4. Chercher

Soit f et g deux fonctions définies sur tout $\mathbf{R}$ et minorées.

Quel rapport peut-on établir entre $\inf f + \inf g$ et $\inf(f + g)$?

5. Détailler une démonstration

Prouver l'équivalence entre les deux définitions suivantes de "f est strictement croissante sur I":

$$\forall x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x, y \in I, x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y).$$