

# Monotonie

## 1. Comparer deux nombres qui se ressemblent I

- Comparez  $\cos 5$  et  $\cos 6$  en explicitant la monotonie que vous utilisez.
- Comparez  $e^e$  et  $\pi^\pi$  en explicitant la ou les monotonies que vous utilisez.
- (Difficile) Trouver une monotonie qui permet de comparer  $e^\pi$  et  $\pi^e$ .

## 2. Comparer deux nombres qui se ressemblent II

- Trouver une fonction simple  $f$  vérifiant  $f(0) = 3$  et  $f(0.0001) = \sqrt{8.9997} + \ln(1.0005)$ .
- Calculer le signe de  $f'$  sur  $[0, 0.0001]$ .
- Comparer  $\sqrt{8.9997} + \ln(1.0005)$  à 3.
- Avec la même méthode, comparer  $3.02^{2.97}$  à 27.

## 3. Encadrer une expression

Encadrez (grossièrement) les expressions suivantes par deux nombres strictement de même signe, en explicitant les monotonies éventuellement invoquées:

$$\frac{4 + \cos 5x}{3x + 8} \text{ pour } x \in [1, 3]; \quad \frac{4x^2 - 3}{\sin 5x - 4} \text{ pour } x \in [-4, -2]; \quad \frac{x^2 + 1}{\sin 5x - 4} \text{ pour } x \in [-1, 4].$$

## 4. Résoudre une inéquation

Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les inéquations suivantes, en justifiant (notamment les élévations au carré) :

- $\sqrt{x^2 + 4} \leq 2 - 3x$  ;
- $\sqrt{x + 8} - 2 \geq 3$  ;
- $\sqrt{x + 8} - 2 \geq \sqrt{2 - x}$ .

Donner une version graphique des résultats trouvés.

## 5. Comprendre et formaliser un énoncé

- On donne un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et une fonction  $f$  définie sur  $I$ . Formalisez l'énoncé  $E$ :

$f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

- Ici on prend  $f := x \mapsto x^2$ . Donner une valeur de  $I$  pour laquelle  $E$  est vrai et une pour laquelle  $E$  est faux.
- Ici, on prend  $I := [0, 3]$ . Donner une valeur de  $f$  pour laquelle  $E$  est vrai et une pour laquelle  $E$  est faux.
- Calculer la négation et la contraposée de  $E$ .

## 6. Détailler une démonstration

- Prouver de façon détaillée que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
- Prouver de façon détaillée que la composée de deux fonctions monotones est monotone.