

# Continuité

## 1. Expliquer pourquoi la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est continue.

**Réponse :** Cette fonction  $f$  est la composée de la fonction  $\ln$  et de la fonction  $x \mapsto (x^2 + 1)$ . D'après le cours, la première est continue et la seconde, qui est un polynôme, aussi. La fonction  $f$  est donc continue d'après le théorème de continuité des fonctions composées.

## 2. Expliquer où la fonction $f := x \mapsto xE(x)$ est discontinue.

**Réponse :** La fonction partie entière est continue en tout point  $a$  non entier. De plus, elle est discontinue en tout point  $a$  entier, où sa limite à gauche vaut  $a - 1$  et non  $a$ . En un point  $a$  non entier, notre fonction  $f$  est donc continue comme produit de la fonction partie entière  $E$  et de la fonction  $x \mapsto x$  qui est continue partout (c'est un polynôme). En un point  $a$  entier, la limite de  $f$  à gauche est  $a(a - 1)$  tandis que sa limite à droite est  $a^2$ . Ces deux limites sont différentes sauf si  $a$  est nul. En conclusion,  $f$  est discontinue en tout point entier non nul.

## 3. Expliciter le prolongement continu en 0 de $x \mapsto x \ln x$ .

**Réponse :** Cette fonction  $f$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ , comme produit de deux fonctions continues. De plus, on sait que lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives,  $f(x)$  tend aussi vers 0. On peut donc prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant:

$$\bar{f} = x \mapsto \begin{cases} \text{si } x = 0 \text{ alors } 0 \\ \text{sinon } x \ln x. \end{cases}$$

## 4. La composée de deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$ est continue.

**Preuve :** Soient donc  $f$  et  $g$  continues sur  $\mathbf{R}$  et montrons que  $f \circ g$  est continue. Pour cela, soit  $a$  un réel quelconque, il faut montrer que  $f \circ g$  est continue en  $a$ . Soit  $\epsilon > 0$ ; on va exhiber  $\eta > 0$  vérifiant, pour tout réel  $x$ :

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

La continuité de  $f$  en  $g(a)$  nous fournit un nombre  $\delta$  strictement positif vérifiant, pour tout réel  $y$ ,

$$(*) \quad |y - g(a)| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(g(a))| < \epsilon.$$

En appliquant la continuité de  $g$  en  $a$  à ce nombre  $\delta$ , on obtient un nombre  $\gamma$  strictement positif qui vérifie, pour tout réel  $x$ ,

$$(**) \quad |x - a| < \gamma \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta.$$

Ce nombre  $\gamma$  est le  $\eta$  qui nous convient. En effet, en appliquant (\*) avec  $y := g(x)$ , on obtient

$$(***) \quad |g(x) - g(a)| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$

En enchaînant (\*\*) et (\*\*\*), on obtient l'implication annoncée :

$$|x - a| < \gamma \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$