

Approximation linéaire

1. Comparer $(\frac{3}{2})^{-\pi}$ et $(\frac{4}{3})^{-e}$.

Je vais montrer $(\frac{3}{2})^{-\pi} < (\frac{4}{3})^{-e}$. Pour cela, j'applique la transitivité avec $(\frac{3}{2})^{-e}$. Il me faut d'abord montrer $(\frac{3}{2})^{-\pi} < (\frac{3}{2})^{-e}$. En passant aux inverses, je dois montrer $(\frac{2}{3})^{\pi} < (\frac{2}{3})^e$ qui découle du fait que la fonction $x \mapsto (\frac{2}{3})^x$ est strictement décroissante sur \mathbf{R} . Ensuite je dois montrer $(\frac{3}{2})^{-e} < (\frac{4}{3})^{-e}$ qui découle du fait que la fonction $x \mapsto x^{-e}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. Comparer $(\frac{2}{3})^{-\pi}$ et $(\frac{2}{3})^{-e}$.

Je veux appliquer la transitivité avec $(\frac{2}{3})^{-e}$.

De $e < \pi$, je déduis $(\frac{2}{3})^{\pi} < (\frac{2}{3})^e$, et donc, en passant aux inverses,

$$(\frac{2}{3})^{-\pi} > (\frac{2}{3})^{-e}.$$

De $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, je déduis $(\frac{2}{3})^e < (\frac{3}{4})^e$, et donc, en passant aux inverses,

$$(\frac{2}{3})^{-e} > (\frac{3}{4})^{-e}.$$

Par transitivité, j'obtiens

$$(\frac{2}{3})^{-\pi} > (\frac{3}{4})^{-e}.$$

3. Dériver $x \mapsto \ln x(\sqrt{x})^{-e}$.

Cette fonction f est le produit de $u := \ln$ avec $v := x \mapsto x^{-\frac{e}{2}}$. La formule de dérivation d'un produit de deux fonctions me donne:

$$f' := u'v + uv' = x \mapsto x^{-\frac{e+2}{2}} - \frac{e}{2} \ln(x)x^{-\frac{e+2}{2}}.$$

En factorisant, il vient:

$$f' := x \mapsto (1 - \frac{e}{2} \ln x)x^{-\frac{e+2}{2}}.$$

4. Calculer la tangente à la fonction \ln au point d'abscisse e^2 .

La tangente a pour équation $y = \ln(e^2) + (x - e^2) \ln'(e^2) = 2 + \frac{x - e^2}{e^2}$ soit finalement

$$y = \frac{x}{e^2} + 1.$$

5. **Proposer une approximation linéaire pour $\sqrt[3]{8.04}$.**

Je vais utiliser l'approximation linéaire de la fonction $f := \sqrt[3]{}$ en $a := 8$. Je calcule la dérivée

$$f' = x \mapsto \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

Et donc la fonction linéarisée est

$$L := x \mapsto \sqrt[3]{8} + (x - 8)\frac{8^{-\frac{2}{3}}}{3}.$$

Je propose comme approximation intelligente de $\sqrt[3]{8.04}$ la valeur de L en 8.04. En utilisant $\sqrt[3]{8} = 2$ et $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$, j'obtiens l'approximation

$$\sqrt[3]{8.04} \approx 2.0033.$$

6. **En quel point de la courbe d'équation $y = x\sqrt{x}$ la tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $3x - y + 6 = 0$?**

Je pose $f := x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$. Comme la pente de la tangente est égale au nombre dérivé, je cherche les points x où f' vaut 3. Pour cela, je résous l'équation

$$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3.$$

Cette équation équivaut à $x^{\frac{1}{2}} = 2$. En élevant au carré (les deux membres sont positifs), on trouve $x = 4$.

On conclut que la tangente à la courbe d'équation $y = x\sqrt{x}$ est parallèle à la droite d'équation $3x - y + 6 = 0$ en un seul point, celui d'abscisse 4.