Continuité

1. Contrôler une fonction

On considère la fonction $f := x \mapsto 3x^2 - x^3$.
a) Trouver un majorant M de $|f'|$ sur $[0, 2]$.
b) Donner un intervalle ouvert I contenant 1 et où f reste entre $1,9$ et $2,1$. Faire un dessin.
c) Etant donné $\epsilon > 0$, donner $\eta > 0$ vérifiant (pour tout x réel) $|x-1| < \eta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$.

2. Justifier une discontinuité

Trouver un point où la fonction $x \mapsto [x](x^2 - x)$ est discontinue. Justifier.

3. Détailler une démonstration

Pour trois réels x, a et r avec r positif, montrer l'équivalence :
$|x-a| \leq r \Longleftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$.

4. Détailler une démonstration

Pour f définie sur tout $\mathbf{R}$ et a quelconque, on considère les quatre énoncés A, B, C, D suivants :
$\forall \eta > 0,\ \exists \epsilon > 0,\ |x-a| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \eta$;
$\forall \eta > 0,\ \exists \epsilon > 0,\ |x-a| < \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \eta$;
$\forall \eta > 0,\ \exists \epsilon > 0,\ |x-a| \leq \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \eta$;
$\forall \eta > 0,\ \exists \epsilon > 0,\ |x-a| \leq \epsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \eta$.
a) Parmi les douze implications entre ces énoncés, cinq sont faciles, lesquelles ? Prouvez-les.
b) Pour prouver l'équivalence entre ces quatre énoncés, il suffit de prouver une implication supplémentaire. Laquelle ?
c) Prouvez cette sixième implication.

5. Rectifier une démonstration

Dénoncer et rectifier la démonstration (délirante) suivante :
Théorème : si deux fonctions (partout définies) sont continues en un point, leur somme l'est aussi.

Preuve : soient f et g les deux fonctions données, et a le point où elles sont supposées continues. On doit montrer que $f+g$ est continue en a. Soit donc ϵ un nombre strictement positif. On doit trouver η strictement positif vérifiant l'implication qu'on sait. Pour cela, utilisons nos deux hypothèses : elles nous fournissent deux nombres η_1 et η_2 vérifiant

$$|x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{et} \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(a)| < \epsilon.$$

En ajoutant membre-à-membre, on obtient

$$|x-a| < \eta_1 + \eta_2 \Longrightarrow |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| < 2\epsilon.$$

Quitte à remplacer ϵ par $\frac{\epsilon}{2}$, on voit que $\eta := \eta_1 + \eta_2$ convient.