

Continuité II

1. Expliquer où et pourquoi une fonction est continue

Expliquer où et pourquoi les fonctions suivantes sont continues, en explicitant les résultats invoqués:

- a) $x \mapsto |11x - 6|$ b) $x \mapsto \sqrt{x+1} - 2\ln(x^2 + 1)$ c) $x \mapsto |x|^{\frac{1}{e}}$
 d) $x \mapsto \frac{x}{|\ln x|}$ e) $x \mapsto \cos x \sqrt{1-x}$ f) $x \mapsto e^{-x^2} + \ln(x^2 - 1)$
 g) $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ h) $x \mapsto \text{si } x \geq 2 \text{ alors } 2x - 1 \text{ sinon } 5 - x.$

2. Expliquer où et pourquoi une fonction est discontinue

Expliquer où et pourquoi les fonctions suivantes sont discontinues:

- a) $x \mapsto \text{si } x \geq 0 \text{ alors } \pi \text{ sinon } 3.14$ b) $x \mapsto \text{si } x \leq 0 \text{ alors } 0 \text{ sinon } \frac{1}{x}$
 c) $x \mapsto \text{si } x \leq 1 \text{ alors } 0 \text{ sinon } \frac{1}{x}$ d) $x \mapsto xE(x).$

3. Prolonger continûment

i) Expliciter, s'il existe, le prolongement continu en 0 de la fonction suivante :

- a) $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ b) $x \mapsto x \ln x$ c) $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ d) $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ e) $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}.$

ii) Expliciter, s'il existe, le prolongement continu en 1 de la fonction suivante :

- a) $x \mapsto \frac{\sin \pi x}{x-1}$ b) $x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ c) $x \mapsto (x-1) \ln(x-1)$ d) $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x-1}.$

4. Démontrer

- a) que la composée de deux fonctions continues sur \mathbf{R} est continue
 b) que la somme de deux fonctions continues sur \mathbf{R} est continue
 c) que le max de deux fonctions continues sur \mathbf{R} est continu
 d) que toute fonction continue périodique sur \mathbf{R} est bornée
 e) que toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet un point fixe
 f) que le polynôme $x \mapsto x^5 + 2x^3 + ex^2 - x + \pi$ admet une racine réelle.