

Encadrements linéaires

1. Encadrer un nombre

i) Encadrer la dérivée de \ln sur $[2, e]$ et sur $[e, 3]$. Faire un dessin.

En déduire un encadrement de $\ln 2$ et $\ln 3$ (sachant $2,71 < e < 2,72$ et $0,367 < 1/e < 0,368$).

ii) Par la même méthode, encadrer

$$\begin{array}{llllll} a) \ln 2.71 & b) \cos 0.51 & c) \sin 0.79 & d) \sqrt[4]{15.98} & e) e^{-0.002} & f) \sqrt[3]{8.01} \\ e) (\ln 2.7)^3 & f) \cos 0.8 + 2 \sin 0.8 & g) \sqrt{3.98} + e^{0.02} & h) \sqrt[3]{8.04} + (1.97)^3. \end{array}$$

2. Encadrer une fonction et son intégrale

On donne une fonction f dérivable définie sur l'intervalle $[-3, 3]$, et vérifiant $f(-3) = 6$, $f(3) = 0$ et $-2 \leq f' \leq 1$.

a) Quel encadrement peut-on en déduire pour $\max f$? pour $\min f$? pour f ? Faire un dessin.

b) On pose $I := \int_{-3}^3 f(t) dt$. Quel encadrement de I donne l'inégalité de la moyenne? Donner un meilleur encadrement. Donner le meilleur encadrement possible et tenter de le justifier.

3. Contrôler une fonction

On considère la fonction $f := x \mapsto 3x^2 - x^3$.

a) Trouver un majorant M de $|f'|$ sur $[0, 2]$.

b) Donner un intervalle ouvert I contenant 1 et où f reste entre 1,9 et 2,1. Faire un dessin.

c) Etant donné $\epsilon > 0$, donner $\eta > 0$ vérifiant (pour tout x réel) $|x - 1| < \eta \implies |f(x) - 2| < \epsilon$.

4. Comprendre et formaliser un énoncé

a) On donne une fonction f définie sur un intervalle I contenant le réel a . Formaliser l'énoncé:

(E): f est continue a .

b) Ici on note $[x]$ la partie entière du réel x et on pose $f := x \mapsto [x] \sin x$. Donner une valeur de a où f est continue et une où elle ne l'est pas. Justifier.

c) Formaliser la négation de E.

5. Détailler une démonstration

a) Pour trois réels x, a et r avec r positif, montrer les équivalences:

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r, \quad |x - a| < r \iff a - r < x < a + r.$$

b) Pour f définie sur tout \mathbf{R} et a quelconque, montrer que les énoncés suivants sont équivalents:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leq \eta \implies f(a) - \epsilon \leq f(x) \leq f(a) + \epsilon;$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, a - \eta < x < a + \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon;$$

$$\forall \eta > 0, \exists \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \implies |f(x) - f(a)| \leq \eta;$$

$$\forall \eta > 0, \exists \epsilon > 0, a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \implies f(a) - \eta < f(x) < f(a) + \eta.$$