

Taylor

1. Interro

- Expliquer le calcul de $\sin([\frac{\pi}{4}, \pi[)$.
- Donner un intervalle non vide où la fonction sinus est croissante et convexe.
- Comparer la fonction sinus à sa linéarisée en $a := -\frac{\pi}{4}$ dans un intervalle autour de a . Dessiner.
- Calculer l'approximation quadratique de $f := x \mapsto x^3$ en $a := 2$

2. Calculer l'image d'un intervalle

- Calculer $\cos([-1, 2[)$.
- Calculez $\cos([0, 2\pi] \cap [4\pi, 6\pi])$ et $\cos([0, 2\pi]) \cap \cos([4\pi, 6\pi])$.

3. Orienter une approximation linéaire

Comparer la fonction cosinus à sa linéarisée en $a := 1$ dans un intervalle autour de a . Faire un dessin.

4. Calculer un trinôme de Taylor

Trouver le trinôme P du second degré vérifiant $P(2) = 2$, $P'(2) = -3$, $P''(2) = 4$.

5. Proposer une approximation quadratique

Proposer une approximation quadratique intelligente pour $\sin 0.8$. Mesurez avec votre calculatrice combien cette approximation est meilleure que l'approximation linéaire correspondante.

6. Encadrer une dérivée seconde

- Encadrer la dérivée seconde :
- de la fonction \ln sur $[2.7, e]$
 - de la fonction \cos sur $[0.5, \frac{\pi}{6}]$
 - de la fonction \sin sur $[\frac{\pi}{4}, 0.8]$
 - de la fonction $\sqrt{\quad}$ sur $[8.98, 9]$
 - de la fonction $\sqrt[3]{\quad}$ sur $[8, 8.04]$.

7. Encadrer quadratiquement

Encadrer la dérivée seconde de \ln sur $[e, 3]$ et en déduire un encadrement de $\ln 3$.

8. Encadrer quadratiquement à reculons

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Encadrer f''' sur $[0.99, 1]$. En déduire un encadrement de $\sqrt{0.99}$ puis (en utilisant $99 = 9 \times 11$) de $\sqrt{11}$.

9. Contrôler une fonction avec Taylor

On donne une fonction f deux fois dérivable définie sur l'intervalle $[-1, 3]$, On suppose que f vérifie $f(-1) = 1$, $f'(-1) = -1$, $f(3) = 2$, $f'(3) = 1$, et $\frac{1}{3} \leq f'' \leq \frac{2}{3}$. Quels encadrements peut-on en déduire pour f , $\max f$, $\min f$ et $\int_{-1}^3 f(t)dt$? Faire un dessin.

10. Calculer la convexité

- Pour quelles valeurs du paramètre m la fonction $x \mapsto \cos 3x + mx^2$ est-elle strictement convexe ?
- Pour quelles valeurs du paramètre m la fonction $x \mapsto x^2 + e^x - m \sin 3x$ est-elle convexe ?