

Continuité

1. Interro

- a) La fonction exponentielle est continue en $a := 3$. Si on formule cet énoncé sans valeurs absolues avec $\epsilon := 0.05$, qu'obtient-on ?
- b) La fonction racine carrée est continue en $a := 3$. Si on formule cet énoncé avec valeurs absolues pour $\epsilon := 0.3$, qu'obtient-on ?
- c) Calculer la négation de $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq -1 \implies x^2 \geq 1$.
- d) Est-ce que la fonction $x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ \sin \frac{x}{2x} & \text{sinon} \end{cases}$ est continue ? Pourquoi ?

2. Expliquer où et pourquoi une fonction est continue

Expliquer où et pourquoi les fonctions suivantes sont continues, en explicitant les résultats invoqués :

- a) $x \mapsto |11x - 6|$ b) $x \mapsto \sqrt{x+1} - 2 \ln(x^2 + 1)$ c) $x \mapsto |x|^{\frac{1}{e}}$
- d) $x \mapsto \frac{x}{|\ln x|}$ e) $x \mapsto \cos x \sqrt{1-x}$ f) $x \mapsto e^{-x^2} + \ln(x^2 - 1)$
- g) $x \mapsto x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ h) $x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ 5 - x & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Expliquer où et pourquoi une fonction est discontinue

Expliquer où et pourquoi les fonctions suivantes sont discontinues :

- a) $x \mapsto \begin{cases} \pi & \text{si } x \geq 0 \\ 3.14 & \text{sinon} \end{cases}$ b) $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$
- c) $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$ d) $x \mapsto xE(x)$.

4. Prolonger continûment

i) Expliciter, s'il existe, le prolongement continu en 0 de la fonction suivante :

- a) $x \mapsto \frac{\sin 2x}{x}$ b) $x \mapsto x \ln x$ c) $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ d) $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ e) $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$.

ii) Expliciter, s'il existe, le prolongement continu en 1 de la fonction suivante :

- a) $x \mapsto \frac{\sin \pi x}{x-1}$ b) $x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$ c) $x \mapsto (x-1) \ln(x-1)$ d) $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x-1}$.

5. Démontrer

- a) que la composée de deux fonctions continues sur \mathbf{R} est continue
- b) que la somme de deux fonctions continues sur \mathbf{R} est continue
- c) que le max de deux fonctions continues sur \mathbf{R} est continu
- d) que toute fonction continue périodique sur \mathbf{R} est bornée
- e) que toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet un point fixe
- f) que le polynôme $x \mapsto x^5 + 2x^3 + ex^2 - x + \pi$ admet une racine réelle.