

Encadrements linéaires

1. Interro

- i) Encadrer $\ln 3$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis à \ln sur $[e, 3]$. La qualité de l'encadrement n'a pas d'importance.
- ii) Encadrer $\sqrt{3}$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $\sqrt{\cdot}$ sur $[3, 4]$. La qualité de l'encadrement n'a pas d'importance.
- iii) Que peut-on dire de $\sup f$ sachant que f est dérivable sur $[2, 5]$ avec $f(2) = 3, f(5) = 2$ et $-3 \leq f' \leq 1$?
- iv) On pose $f := x \mapsto 7x - \sin 2\pi x$. Encadrer f' et en déduire un intervalle autour de 1 dans lequel f reste comprise entre 6.9 et 7.1. La qualité de l'intervalle n'a pas d'importance.

2. Encadrer par IAF

Encadrer par IAF

- a) $\ln 2.71$ b) $\cos 0.51$ c) $\sin 0.79$ d) $\sqrt[4]{15.98}$ e) $e^{-0.002}$ f) $\sqrt[3]{8.01}$
 e) $(\ln 2.7)^3$ f) $\cos 0.8 + 2 \sin 0.8$ g) $\sqrt{3.98} + e^{0.02}$ h) $\sqrt[3]{8.04} + (1.97)^3$.

3. Encadrer une fonction et son intégrale

On donne une fonction f dérivable définie sur l'intervalle $[-3, 3]$, et vérifiant $f(-3) = 6, f(3) = 0$ et $-2 \leq f' \leq 1$.

- a) Quel encadrement peut-on en déduire pour $\max f$? pour $\min f$? pour f ? Faire un dessin.
- b) On pose $I := \int_{-3}^3 f(t) dt$. Quel encadrement de I donne l'inégalité de la moyenne? Donner un meilleur encadrement. Donner le meilleur encadrement possible et tenter de le justifier.

4. Contrôler une fonction

On considère la fonction $f := x \mapsto 3x^2 - x^3$.

- a) Trouver un majorant M de $|f'|$ sur $[0, 2]$.
- b) Donner un intervalle ouvert I contenant 1 et où f reste entre 1,9 et 2,1. Faire un dessin.
- c) Etant donné $\epsilon > 0$, donner $\eta > 0$ vérifiant (pour tout x réel) $|x - 1| < \eta \implies |f(x) - 2| < \epsilon$.

5. Encadrer une intégrale

- a) Pour $p \geq 1$ entier, calculer le sup et l'inf de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $[p, p+1]$.
- b) Quel encadrement peut-on en déduire pour $\ln(p+1) - \ln p$? pour $\ln(p+2) - \ln p$?
- c) (Trop difficile) Quel encadrement peut-on en déduire pour $\ln p$?

6. Détailler une démonstration

a) Pour trois réels x, a et r avec r positif, montrer les équivalences :

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x - r \leq a \leq x + r.$$

b) Pour f définie sur tout \mathbf{R} et a quelconque, montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leq \eta \implies f(a) - \epsilon \leq f(x) \leq f(a) + \epsilon ;$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, a - \eta < x < a + \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon ;$$

$$\forall \eta > 0, \exists \epsilon > 0, |x - a| < \epsilon \implies |f(x) - f(a)| \leq \eta ;$$

$$\forall \eta > 0, \exists \epsilon > 0, a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \implies f(a) - \eta < f(x) < f(a) + \eta.$$