Parties (suite)

Dédou

Avril 2013

La réunion comme borne supérieure

La réunion de deux parties est leur borne supérieure en ce sens que c'en est un majorant et que c'est le plus petit.

Preuve de la seconde partie de l'énoncé.
Soit C un majorant commun à nos deux parties A et B.
Montrons que C contient $A \cup B$.
Pour cela, choisissons un x quelconque dans $A \cup B$.
Soit x est dans A, auquel cas il est dans C puisque C contient A, soit x est dans B, auquel cas il est dans C puisque C contient B.

L'intersection opère sur les parties

L'intersection des parties de $\mathbb{R}$ est une opération

dont la carte de visite est :

$$\begin{array}{rccc} \cap : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & (X, Y) & \mapsto & X \cap Y \end{array}$$

L'explicitation de l'intersection des parties

L'intersection des parties de E s'explicite comme suit

$$\forall A, B \subset \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Propriétés de l'opération d'intersection

L'intersection des parties a les propriétés suivantes

- elle est "commutative" : $\forall X\ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cap Y = Y \cap X$.
- elle est "associative" : $\forall X\ Y\ Z : \mathcal{P}(\mathbb{R}), (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.
- elle a un "neutre" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap X = X$.
- elle a un "absorbant" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$.

Et ça se démontre.

L'intersection comme borne inférieure

L'intersection de deux parties est leur borne inférieure

en ce sens que c'en est un minorant et que c'est le plus grand.

Exo

Prouver la seconde partie de cet énoncé.

Le complémentaire des parties

Le complémentaire des parties de $\mathbb{R}$

a la carte de visite suivante :

$$\complement : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & \complement(X) \end{array}$$

L'explicitation du complémentaire

Le complémentaire s'explicite comme suit

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x \in \complement(A) \Leftrightarrow x \notin A.$$

Et ça se démontre.

Propriétés du complémentaire

L'opération de passage au complémentaire a les propriétés suivantes

- elle est "involutive" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), \complement(\complement(X)) = X$.
- et donc elle est bijective
- elle est "décroissante" : $\forall X\ \ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset Y \Leftrightarrow \complement(Y) \subset \complement(X)$.

Une caractérisation du complémentaire

Le complémentaire d'une partie A est caractérisé par les deux propriétés suivantes : il est disjoint de A et sa réunion avec A est $\mathbb{R}$ tou entier.

Preuve. Soit C une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant ces deux conditions et soit x dans C : comme C est disjoint de A, x est dans son complémentaire.
Inversement soit maintenant x dans le complémentaire de A : comme x n'est pas dans A, il est dans C puisque la réunion de A et C est $\mathbb{R}$ tout entier.

Complémentaire d'une réunion

Le complémentaire d'une réunion

c'est l'intersection des complémentaires.

Exo corrigé

Formaliser et prouver cette propriété.

Complémentaire d'une intersection

Le complémentaire d'une intersection

c'est la réunion des complémentaires.

Exo 3

Formaliser et prouver cette propriété.