Fonction caractéristique

Dédou

Avril 2013

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une partie A de $\mathbb{R}$

a la carte de visite suivante

$$\chi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{B} \\ x & \mapsto & x \in A \end{array}$$

Exemple

La fonction caractéristique de $I := [0, +\infty[$ est la fonction

$$\chi_I := \quad \text{if} \quad x \geq 0 \quad \text{then} \quad V \quad \text{else} \quad F.$$

Fonction caractéristique et opérations

La fonction caractéristique d'une intersection

est la conjonction des fonctions caractéristiques :

Exo corrigé

Formaliser et prouver ça.

Fonction caractéristique et opérations

La fonction caractéristique d'une réunion

est la disjonction des fonctions caractéristiques :

Exo 4

Formaliser et prouver ça.

La fonction caractéristique d'un complémentaire

est la négation de la fonction caractéristique initiale.

La construction support

Voici la carte de visite de la construction support

$$\begin{array}{rccl} \mathit{supp} : & (\mathbb{R} \to \mathbb{B}) & \to & \mathit{Ens} \\ & P & \mapsto & \mathit{supp}(P) \\ & P & \mapsto & \{x : \mathbb{R} | P(x)\} \end{array}$$

- $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$ se lit
  "l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ vérifiant (ou tels que) $P(x)$"
- les éléments de cet ensemble sont les réels vérifiant P
- dans $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$, la variable x est liée
- on a donc $\{x : \mathbb{R} | P(x)\} = \{y : \mathbb{R} | P(y)\}$.

Exemple

On a $\{x : \mathbb{R} | x > e \text{ et } x < \pi\} =]e, \ \pi[$.

Les éléments d'un support

Comme son nom l'indique

Les éléments de $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$ sont les réels vérifiant P

On a donc la règle d'explicitation :

$\forall a : \mathbb{R}, \forall P : \mathbb{R} \to \mathbb{B},$

$$a \in \{x : \mathbb{R} | P(x)\} \Leftrightarrow P(a).$$

Exemple

On a $e + \pi \in \{x : \mathbb{R} | x^2 \leq x\}$ ssi $(e + \pi)^2 \leq e + \pi$.

Exo 5

Explicitez $1 + \sqrt{2} \in \{x : \mathbb{R} | x^2 - x - 1 = 0\}$.

Support et fonction caractéristique

L'application support : $(\mathbb{R} \to \mathbb{B}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$
est bijective et sa réciproque est l'application "fonction caractéristique : $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{B})$.

Preuve : Soit A une partie de $\mathbb{R}$, χ_A sa fonction caractéristique et x dans le support de cette dernière. On a donc $\chi_A(x) = V$ ce qui veut dire que x est dans A. Et inversement, si x est dans A alors $\chi_A(x)$ est Vrai et donc x est dans le support de χ_A. Dans l'autre sens, soit f une fonction quelconque sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans , S son support, c la fonction caractéristique de ce dernier, et x un réel quelconque. Si $f(x)$ est vrai, alors x est dans S et $c(x)$ est vrai. Si au contraire $f(x)$ est faux, alors x n'est pas dans S et $c(x)$ est faux.