Définitions

Dédou

Janvier 2012

Définir un nombre

La façon la plus simple de poser une définition consiste à associer un **nom** à une formule

Définition

Je pose toto $:= 123456789123456789123456789$.

Ici le nom est toto et la formule est 123456789123456789123456789.

Quand on pose une définition, il faut choisir un nom qui n'est pas déjà pris.

Dès qu'on doit écrire deux fois un objet, on gagne à lui donner un nom trois fois plus court.

Définition formelle d'une fonction

On peut aussi définir des fonctions. Dans ce cas, la formule contiendra le plus souvent le symbole $\mapsto$.

Définition

On appelle cosinus hyperbolique (ou *ch*) la fonction $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Définition vulgaire d'une fonction

Pour définir une fonction, on peut se contenter de donner son **corps**. On procède alors comme suit.

Définition

Soit x un nombre réel. On appelle sinus hyperbolique de x le nombre $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, qu'on note $sh(x)$.

Exo 1

Donnez la variante fonctionnelle de la définition vulgaire suivante :
Soit x un réel quelconque. On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le nombre $\max(x, -x)$.

Définition littéraire d'ensembles

On n'aime pas trop écrire la construction $\{...|...\}$, qu'on préfère souvent remplacer par sa version littéraire.

Définition

On appelle **cercle unité** et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des couples (x, y) de réels vérifiant $x^2 + y^2 = 1$.

Définition

On appelle **demi-plan supérieur** et on note H l'ensemble des poins du plan d'ordonnée strictement positive.

Exo 2

Convertir la définition précédente en définition formelle.

Définition d'énoncés

On définit aussi des énoncés.

Définition

On appelle conjecture de Goldbach et on note CG l'énoncé suivant :
Tout entier pair est somme de deux nombres premiers.

Celui qui met "conjecture" dans le nom pense que l'énoncé est vrai sans en être sûr.

Définition vulgaire de propriétés

On peut même définir des énoncés dépendant d'une variable, c'est ce qu'on appelle des propriétés.

Définition

Soit x un nombre entier. On dit que x est extrémiste s'il n'a que des 0 et des 9 dans son développement décimal.

Définition formelle de propriétés

On peut définir les propriétés de façon plus formelle, comme des fonctions à valeurs dans *Prop*. Mais en général on trouve que ça ne clarifie pas forcément les choses.

Définition

On pose $pair : \mathbb{N} \to Prop := n \mapsto \exists p : \mathbb{N}, n = 2p$.

Propriétés de fonctions

On définit des propriétés non seulement pour des nombres, mais pour n'importe quel type d'objet, notamment pour des fonctions.

Définition vulgaire

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire ssi, pour tout réel x, on a $f(-x) = f(x)$.

Et sa variante formelle

On pose *paire* : $(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to Prop := f \mapsto \forall x : \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

Définition par propriété caractéristique

Pour donner une définition, il n'est pas nécessaire de donner une formule, il suffit de donner une propriété caractéristique, autrement dit une propriété que l'objet visé est seul à vérifier. Cependant, une telle définition doit être couplée avec la preuve d'existence et d'unicité correspondante.

Définition

On appelle j l'unique racine cubique complexe de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive.

Celui qui profère cette définition doit montrer que 1 a bien une et une seule racine cubique complexe de partie imaginaire strictement positive.

Exo 3

Que doit démontrer celui qui définit le nombre d'or comme la solution réelle positive de l'équation $x^2 = x + 1$?

Fonctions de deux variables

Une définition fonctionnelle

On appelle **minimum** et on note min la fonction de deux variables réelles $(x, y) \mapsto \text{ if } x \leq y \text{ then } x \text{ else } y$.

Et sa variante vulgaire

Soient x et y deux nombres réels. On appelle **minimum** de x et y et on note $\min(x, y)$ le nombre $\text{ if } x \leq y \text{ then } x \text{ else } y$.

La variante vulgaire est plus facile à percevoir.
Donc c'est celle qu'on préfère.
Mais il faut bien comprendre qu'elle dit la même chose que l'autre.

Vulgarité incontournable

Une définition vulgaire par propriété caractéristique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On appelle **borne supérieure** de f et on note $\sup f$ l'unique élément M de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $\forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M \quad$ et $\quad \forall m < M, \exists x : \mathbb{R}, m < f(x)$.

On ne peut pas remplacer une définition vulgaire par propriété caractéristique par une variante fonctionnelle puisqu'il n'y a pas de formule.
Mais la définition vulgaire permet justement d'écrire une formule.
On peut donc donner la variante fonctionnelle en plus :

Variante fonctionnelle

On a donc défini une application $\sup : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ caractérisée par les deux propriétés
$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq \sup f$ et
$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall m < \sup f, \exists x : \mathbb{R}, m < f(x)$.

Propriétés et adjectifs

Pour les propriétés

on donne souvent une terminologie “vulgaire” à base d'adjectifs plutôt qu'un nom.

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que f est **strictement croissante** si elle vérifie

$$\forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

On peut appeler “stricte_croissance” la variante formelle

$$f \mapsto \forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

Définitions très vulgaires

En pratique

on formule le plus souvent les énoncés en langue naturelle.

Quand on lit

Définition

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est convexe si elle est stable par combinaison linéaire barycentrique à coefficients positifs.

il faut comprendre un truc du genre

Définition

$$\begin{array}{rccl} cvx : & \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) & \rightarrow & Prop \\ & P & \mapsto & cvx(P) \\ & P & \mapsto & \forall x, y : P, \forall a : [0,1], ax + (1-a)y \in P. \end{array}$$

Exemple

Quand on lit

Définition

On dit qu'une fonction atteint son maximum en un point si elle y prend sa plus grande valeur.

il faut comprendre un truc du genre

Définition

$$\begin{array}{rccl} att\_max : & (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \times \mathbb{R} & \to & Prop \\ & (f, a) & \mapsto & att\_max(f, a) \\ & (f, a) & \mapsto & \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq f(a). \end{array}$$

Exo 4

Donnez votre variante fonctionnelle de la définition suivante :
On dit qu'un nombre majore une fonction s'il est plus grand que toutes les valeurs prises par cette fonction.

Décrypter une définition

Pour décrypter une définition ultra-vulgaire, il suffit d'en donner une variante moins vulgaire.

Exemple

Quand on dit qu'une suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est stationnaire ssi

$$u_n \text{ est constant pour } n \text{ suffisamment grand,}$$

on veut dire par exemple ssi

$$\exists N : \mathbb{N}, \forall n : \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = u_N.$$

Exo 5

Donner une variante moins vulgaire de la définition suivante : on dit qu'une suite u finit positive si u_n est positive pour n suffisamment grand.

Définitions partielles par propriété caractéristique : exemple

Définition

Soit x un réel. Il existe au plus un nombre y vérifiant

$$xy = 1.$$

On dit que ce nombre est l'inverse de x et on le note $\frac{1}{x}$.

Le type de l'inverse

On peut voir l'inverse comme une fonction $inv : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. Certains préfèrent écrire $inv : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp$, ce qui met aussi bien en évidence le fait que l'inverse n'est pas partout défini.

Exo 6

Rappeler la définition de l'inverse d'une matrice carrée.

Définitions partielles par propriété caractéristique : exemple

Définition

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. Il existe au plus un nombre L vérifiant

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad L - \epsilon \leq u_n \leq L + \epsilon.$$

On dit que ce nombre est la limite de u et on le note $\lim u$.

Le type de la limite

On pourrait donner un nom à l'ensemble des suites admettant une limite, par exemple *Conv* et on aurait $\lim : Conv \to \mathbb{R}$.
Certains préfèrent écrire $\lim : (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_\perp$.
La limite des suites divergentes est alors $\perp$. On n'a pas eu à nommer le domaine de définition de lim, et le fait que la limite n'est pas toujours définie reste bien en évidence.

Définitions partielles par propriété caractéristique

Pour définir une application partielle $f : E \to F_\perp$, il faut

- formuler une propriété $P(x, y)$ des couples (x, y) de $E \times F$;
- et montrer que pour tout x dans E, il existe au plus un y de F vérifiant $P(x, y)$.

Exemple

S'il existe, on appelle borne supérieure d'une fonction f le seul majorant de f qui minore tous les autres.

Exo 7

Que faut-il démontrer pour valider cette définition ?

Explicitation

Expliciter une définition

c'est remplacer le nom (ou l'adjectif) par la valeur qu'il représente.

Exemple

Expliciter
"la fonction cosinus atteint son maximum en $\sqrt{2}$"
c'est écrire

$$\forall x : \mathbb{R}, \cos x \leq \cos(\sqrt{2}).$$