Mes premières tactiques gratuites

Dédou

Janvier 2012

La tactique ForallB

La tactique ForallB

- le sens de cette tactique est que, pour prouver $\forall x : E, P(x)$, il suffit de prouver $P(x)$ en supposant seulement que x est de type E
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $\forall x : E, P(x)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace le séquent courant $C \vdash \forall x : E, P(x)$ par $C; x : E \vdash P(x)$
- elle est gratuite
- on peut écrire par exemple :
  "Soit x un élément quelconque de E et prouvons $P(x)$"

La règle d'inférence ForallB

Avant : $C \vdash \forall x : E, P(x)$

Après : $C; x : E \vdash P(x)$

Autrement dit :

$$\frac{C; x : E \vdash P(x)}{C \vdash \forall x : E, P(x)}$$

Exemple pour la tactique ForallB

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. Mon séquent initial est

$$\vdash \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ et } g \text{ majorées} \Rightarrow\ f + g \text{ majorée.}$$

J'applique la tactique ForallB et mon séquent devient :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \vdash \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ et } g \text{ majorée} \Rightarrow\ f + g \text{ majorée.}$$

Exo 1

Que devient ce séquent si j'applique une deuxième fois la tactique ForallB ?

La tactique ImpB

La tactique Implique au but

- le sens de cette tactique est que pour prouver $A \Rightarrow B$, il faut (ou suffit de) prouver B sachant A
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $A \Rightarrow B$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace le séquent courant $(C \vdash A \Rightarrow B)$ par le séquent $C; A \vdash B$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : Nous devons prouver $A \Rightarrow B$. Pour cela, supposons A et prouvons B.

La règle d'inférence ImpB

Avant : $C \vdash A \Rightarrow B$

Après : $C; A \vdash B$

$$\frac{C \vdash A \Rightarrow B}{C; A \vdash B}$$

Exemple pour la tactique ImpB

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. J'ai déjà fait deux ForallB et mon séquent courant est

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \vdash \ f \text{ et } g \text{ majorées} \Rightarrow \ f + g \text{ majorée.}$$

J'applique la tactique ImpB et mon séquent devient :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \ f \text{ et } g \text{ majorées} \vdash \ f + g \text{ majorée.}$$

Exo 2

Si on fait ForallB puis ImpB pour prouver que le cube d'une fonction croissante est croissante, quel séquent courant obtient-on ?

La tactique EtC

La tactique Et au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A and B, il suffit de prouver G sachant A et B
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A and B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs)
- elle remplace le séquent courant $C'; A$ and $B; C'' \vdash G$ par le séquent $C'; A; B; C'' \vdash G$
- elle est "gratuite"
- cette tactique ne laisse pas de trace dans la rédaction.

La règle d'inférence EtC

Avant : $C'; A \text{ and } B; C'' \vdash G$

Après : $C'; A; B; C'' \vdash G$

ou, si on préfère :

$$\frac{C'; A; B; C'' \vdash G}{C'; A \text{ and } B; C'' \vdash G}$$

Exemple pour la tactique EtC I

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. J'ai déjà fait deux ForallB et un ImpB et mon séquent courant est

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ et } g \text{ majorées} \vdash\ f + g \text{ majorée.}$$

J'explicite "majorées" et mon hypothèse devient f majorée and g majorée. J'applique la tactique EtC à cette hypothèse et mon séquent courant devient

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{ majorée};\ g \text{ majorée} \vdash\ f + g \text{ majorée.}$$

Exo 3

Formaliser l'énoncé "si une fonction est à la fois croissante et décroissante, elle est constante" et appliquez-lui trois tactiques successives.

Exemple pour la tactique EtC II

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est continue, alors son image est un intervalle. Mon séquent courant est le suivant

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\mathrm{continue},\ a:\mathbb{R},\ b:\mathbb{R}, y:\mathbb{R}, y\in[f(a),f(b)]$$
$$\vdash \exists x:\mathbb{R}, f(x)=y.$$

J'explicite $y\in[f(a),f(b)]$ en $f(a)\leq x$ and $x\leq f(b)$ puis j'applique la tactique Et au contexte. Mon séquent courant devient

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\mathrm{continue},\ a:\mathbb{R},\ b:\mathbb{R}, y:\mathbb{R}, f(a)\leq y,\ y\leq f(b)$$
$$\vdash \exists x:\mathbb{R}, f(x)=y.$$

Exo 4

Rappelez la définition de $[a,b]$ (celle utilisée ci-dessus) ;
ou, si vous préférez :
dans l'exemple précédent, écrivez le contexte intermédiaire entre l'explicitation et la tactique.

La tactique ExistC

La tactique ExistC

- le sens de cette tactique est que savoir $\exists x : E, P(x)$, c'est comme avoir un x vérifiant $P(x)$
- elle s'applique lorsque le contexte courant comporte une hypothèse de la forme $\exists x : E, P(x)$
- elle a un argument, qui est cette hypothèse (pour le cas où il y a plusieurs hypothèses de cette forme)
- elle remplace le séquent courant

$$C'; \exists x : E, P(x); C'' \vdash G$$

  par

$$C'; x : E; P(x); C'' \vdash G$$

- elle est gratuite
- c'est encore une tactique qui ne laisse pas de trace écrite.

La tactique ExistC : le dessin

$$\frac{C'; x : E; P(x); C'' \vdash G}{C'; \exists x : E, P(x); C'' \vdash G}$$

Exemple pour la tactique ExistC I

Exemple

Je suis en train de démontrer que si f et g sont majorées alors $f+g$ est majorée. Mon séquent courant est

$$f\ \ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ f \text{ majorée};\ \ g \text{ majorée} \vdash\ \ f+g \text{ majorée.}$$

J'explicite la première hypothèse en $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$ puis j'applique la tactique Exists au contexte.

Mon séquent courant devient :

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ M : \mathbb{R};\ \ \forall x : \mathbb{R},\ \ f(x) \leq M;\ \ g \text{ majorée} \\ \vdash f+g \text{ majorée.}$$

Exo 5

Ecrivez le séquent courant après une seconde application de la tactique ExistC.

Exemple pour la tactique ExistC II

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est monotone, alors $f[a, b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon séquent courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \mathrm{croissante};\ a,\ b : \mathbb{R};\ a \leq b; y : \mathbb{R};\ y \in f[a, b] \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

J'explicite $y \in f[a, b]$ en $\exists x : [a, b], y = f(x)$ puis j'applique la tactique ExistC.

Mon séquent courant devient

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \mathrm{croissante};\ a,\ b : \mathbb{R};\ a \leq b; y : \mathbb{R};\ x : [a, b];\ y = f(x) \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

La tactique OuC

La tactique Ou au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A or B, il suffit de traîter successivement le cas où A est vrai, puis celui où B est vrai
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A or B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs de cette forme)
- elle remplace le séquent courant $(C', A \text{ or } B, C'' \vdash G)$ par les deux séquents $(C', A, C'' \vdash G)$ et $(C', B, C'' \vdash G)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire : "On sait qu'on a A or B. Commençons par supposer A. ... Et maintenant supposons B. ..."

C'est notre première tactique qui augmente la taille de la pile.

La tactique OuC : le dessin

$$\frac{C', A, C'' \vdash G \qquad C', B, C'' \vdash G}{C', A \text{ or } B, C'' \vdash G}$$

Exemple pour la tactique OuC I

Exemple

Je cherche à montrer que si une fonction f est monotone, alors $f \circ f$ est croissante. J'ai fait ForallB et ImpB et mon séquent courant est

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ monotone} \vdash f \circ f \text{ croissante}$

J'explicite l'hypothèse "f monotone" en

"f est croissante ou f est décroissante"

et j'applique la tactique OuC.

Mon séquent courant devient :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ croissante} \vdash f \circ f \text{ croissante}$

Exo 6

Cette dernière tactique a mis un nouveau séquent en attente. Lequel ?

Exemple pour la tactique OuC II

Exemple

Je cherche à montrer que la composée de deux fonctions monotones est monotone.
Mon séquent courant est
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ monotone}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \text{ monotone} \vdash f \circ g \text{ monotone}$
J'explicite l'hypothèse "f monotone" en
"f est croissante ou f est décroissante"
et j'applique cette tactique Ou au contexte.
Mon séquent courant devient :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ croissante}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g \text{ monotone} \vdash f \circ g \text{ monotone}$

Exo 7

Cette dernière tactique a mis un nouveau séquent en attente. Lequel ?

La tactique Et au but

La tactique Et au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver A and B, il suffit de prouver A puis B
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme A and B
- elle n' a pas d'argument
- elle remplace le séquent courant ($C \vdash A$ and B) par les deux séquents : ($C \vdash A$) et ($C \vdash B$)
- elle est "gratuite"
- on peut écrire (quelque chose de plus court que) : Nous devons prouver A and B. Pour cela, commençons par prouver A. ... Et maintenant prouvons B. ...

La tactique EtB : le dessin

$$\frac{C \vdash A \qquad C \vdash B}{C \vdash A \text{ and } B}$$

Exemple pour la tactique EtB

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est croissante, alors $f[a,b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon séquent courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\text{croissante},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R},\ a \leq b, y : \mathbb{R};\ y \in f[a,b] \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

J'explicite $y \in [f(a), f(b)]$ en $f(a) \leq y$ and $y \leq f(b)$ puis j'applique la tactique EtB. Mon séquent courant devient

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\text{croissante},\ a : \mathbb{R},\ b : \mathbb{R},\ a \leq b, y : \mathbb{R};\ y \in f[a,b] \vdash f(a) \leq y.$$

Exo 8

Cette dernière tactique a aussi mis un nouveau séquent en attente. Lequel ?

La tactique OuB

La tactique Ou au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver A or B, il suffit de prouver de prouver B en supposant A faux, ou alors de prouver A en supposant B faux
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme A or B
- elle a un argument qui est soit gauche (on choisit de prouver A) soit droite (on choisit de prouver B).
- elle remplace le séquent courant $C \vdash A$ or B
  si son argument est gauche par $C; \overline{B} \vdash A$
  et si son argument est droite par $C; \overline{A} \vdash B$
- elle est gratuite
- par exemple dans le cas de l'argument droit, on peut écrire : Supposons que A est faux, et prouvons B ...

La tactique OuB : le dessin

$$\frac{C, \overline{B} \vdash A}{C \vdash A \text{ or } B} \qquad \frac{C, \overline{A} \vdash B}{C \vdash A \text{ or } B}$$

Exemple pour la tactique OuB

Exemple

J'essaie encore de démontrer que si f est monotone, $f \circ f$ l'est aussi. Mon séquent courant est

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{croissante} \vdash\ f \circ f \text{monotone}.$$

J'explicite le but puis j'applique à gauche la tactique OuB. Mon séquent courant devient :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f \text{croissante};\ f \circ f \text{non décroissante} \vdash\ f \circ f \text{croissante}.$$

Exo 9

Face au même problème, Bob applique lui aussi la tactique OuB, non pas à gauche, mais à droite. Quel est son nouvel séquent ?