Autres tactiques

Dédou

Janvier 2012

D'autres tactiques ?

On a vu les huit tactiques essentielles,

celles qui fondent le sens de nos énoncés.

Et aussi Affaiblir et Contracter.

Mais

on doit introduire quelques autres tactiques.

La tactique Expliciter

Les définitions c'est cool

mais ça masque le vrai énoncé.
Appliquer la tactique Expliciter, c'est restaurer le vrai énoncé, et permettre éventuellement de lui appliquer une tactique logique (ou autre).

On peut expliciter n'importe où :

au but, ou dans une hypothèse.

On a déjà vu plein d'exemples.

La tactique Poser

Les définitions c'est cool

on peut les appliquer
mais on peut aussi en créer de nouvelles.
Quand on est embêté par une formule compliquée t, on peut introduire une nouvelle variable, disons n, du même type que t, avec l'hypothèse $n = t$, ce qu'on écrit souvent en une seule ligne $n := t$.

On a déjà vu plein d'exemples.

La tactique Vrai

La tactique Vrai

- le sens de cette tactique est que si le but est Vrai, on a gagné
- elle s'applique lorsque le but courant est Vrai
- elle n'a pas d'argument
- elle élimine l'objectif courant
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple à la fin de la phrase en cours " ... ce qui achève la preuve."

La tactique Faux

La tactique Faux

- le sens de cette tactique est que si on a l'hypothèse Faux, on a gagné
- elle s'applique lorsque qu'une hypothèse est Faux
- elle n'a pas d'argument
- elle élimine l'objectif courant
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple à la fin de la phrase en cours " ... ce qui est impossible."

La tactique Hypothèse

La tactique Hypothèse

- le sens de cette tactique est que si le but coïncide avec une hypothèse, on a gagné
- elle s'applique lorsque le but courant coïncide avec une hypothèse
- elle a cette hypothèse en argument (mais on s'en fout)
- elle élimine l'objectif courant
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple à la fin de la phrase en cours " ... ce qui est bien vrai par hypothèse."

$$\frac{}{C'; H; C'' \vdash H}$$

La tactique Observer

La tactique Observer

- le sens de cette tactique est que pour prouver A, on peut commencer par prouver un fait H, après quoi il suffit de prouver A avec l'hypothèse supplémentaire H.
- elle s'applique dans toutes les situations
- elle a un argument, qui est le fait H en question
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par les deux objectifs $C \vdash H$ et $C; H \vdash G$.
- elle n'est pas du tout gratuite : si on a choisi un énoncé H qui est faux, on ne va pas s'en sortir.
- on peut écrire par exemple : "Commençons par prouver H. ... Revenons maintenant à la preuve de G."

Histoire de la tactique Observer

Au départ,

avant JC, la tactique Observer s'appelait règle du modus ponens.
C'était la règle fondamentale.
C'est seulement au vingtième siècle qu'ils ont compris que cette règle n'était qu'une conséquence des autres.
Ce n'est pas complétement évident, ça se démontre.

La tactique Invoquer

La tactique Invoquer

- le sens de cette tactique est que pour prouver A, on peut utiliser une ressource H prouvée ailleurs
- elle s'applique dans toutes les situations
- elle a un argument, qui est la ressource H en question
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par l'objectif $C; H \vdash G$.
- elle est gratuite
- on peut écrire par exemple : "On utilise H" ou " D'après H …"

La tactique Contraposer

La tactique Contraposer

- le sens de cette tactique est que pour prouver B sachant A il suffit de prouver $\overline{A}$ sachant $\overline{B}$
- elle s'applique si le contexte contient une hypothèse libre (voir plus haut)
- elle a un argument, qui est l'hypothèse en question
- elle remplace l'objectif courant $C'; A; C'' \vdash B$ par l'objectif $C'; \overline{B}; C'' \vdash \overline{A}$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "Raisonnons par contraposition : supposons que B est faux, et montrons que A est faux."

Justification approximative de la tactique Contraposer

Si deux objectifs sont contraposés l'un de l'autre

et si on peut prouver l'un avec les huit tactiques logiques, on peut aussi prouver l'autre. Ca vient de la symétrie entre tactiques au but et tactiques au contextes.

Exemple

Considérons l'objectif $(C; A \vdash B \text{ and } B')$. La tactique Et au but génère deux objectifs O_1 et O_2. Symétriquement, on peut appliquer la tactique Ou au contexte à l'objectif contraposé $(C; \overline{B} \text{ or } \overline{B'} \vdash \overline{A})$. Les deux objectifs générés sont contraposés de O_1 et O_2.

Exo 1

Ecrivez un de ces deux derniers objectifs.

Digression sur la tactique Contraposer

Plutôt que de jouer à contraposer

il paraît plus simple (mais un peu moins intuitif pour un étudiant de première année) de contraposer une fois pour toutes avec Vrai : au lieu de considérer $C \vdash G$, passer à $C, Vrai \vdash G$ puis par contraposition, à $C, \overline{G} \vdash Faux$ parce que dans cette situation, tout se passe au contexte, et on n'a plus de tactique au but (deux fois moins de tactiques).

La tactique Absurde

La tactique Absurde

- le sens de cette tactique est que pour prouver B, on a le droit de supposer B faux.
- elle s'applique toujours
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash B$ par l'objectif $C, \overline{B} \vdash B$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "Raisonnons par l'absurde et supposons que B est faux."

Les profs n'aiment pas la tactique Absurde

parce que les étudiants en abusent.

Justification de la tactique Absurde

La tactique Absurde se décompose comme suit

- on part de l'objectif courant $C \vdash B$
- on observe Vrai (qu'on sait prouver), et l'objectif devient $C, V \vdash B$
- on contrapose V et l'objectif devient $C; \overline{B} \vdash F$
- on observe $\overline{B}$, qu'on sait prouver par la tactique Hypothèse, et l'objectif courant devient $C; \overline{B}; \overline{B} \vdash F$
- et on contrapose à nouveau, le but courant devient $C; \overline{B}; Vrai \vdash B$
- on peut oublier l'hypothèse Vrai,qui ne sert à rien.

La tactique Distinguer

La tactique Distinguer

- le sens de cette tactique est que pour prouver A, on peut commencer par prouver A moyennant une hypothèse supplémentaire H, puis prouver de nouveau A, mais moyennant cette fois l'hypothèse contraire $\overline{H}$
- elle s'applique dans toutes les situations
- elle a un argument, qui est l'énoncé H en question
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par les deux objectifs $C; H \vdash G$ et $C\overline{H} \vdash G$.
- elle est gratuite en principe, mais si H est mal choisi, elle ne sert à rien
- on peut écrire par exemple : "Commençons par supposer H. ... Supposons maintenant au contraire que H est faux. ..."

Justification de la tactique Distinguer

La tactique Distinguer suivant H

s'obtient par la recette suivante :

- Observer H or $\overline{H}$
- Le premier but H or $\overline{H}$ est prouvé une fois pour toutes
- Pour le second objectif, appliquer la tactique Ou à la nouvelle hypothèse H or $\overline{H}$.

Réécrire

Le principe des tactiques de réécriture, c'est qu'on peut, où on veut, remplacer un terme par un terme qui lui est égal.

Réécrire au but

La tactique Réécrire au but

- le sens de cette tactique est que si on sait que A et B sont égaux, pour prouver G, il suffit de prouver le but G' obtenu en remplaçant, dans G, A par B, ici où là
- elle s'applique dès qu'on dispose d'une égalité à appliquer
- elle n'a comme argument les places dans G où on veut remplacer A et la ressource R qui fournit l'égalité $A = B$
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par l'objectif $C \vdash G'$ comme indiqué plus haut
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "En appliquant R, on se ramène à prouver G'."

Réécrire au contexte

La tactique Réécrire au contexte

c'est pareil sauf que c'est dans une hypothèse qu'on remplace A par B.

Réécrire un énoncé

La réécriture s'applique aussi aux énoncés

Dans l'objectif courant, on peut remplacer le but, ou une hypothèse par un énoncé équivalent.

Dans le premier cas, on dira qu'on applique la tactique ReecB et dans le second la tactique ReecC.

Induction

La tactique Induction

- on connaît bien cette tactique
- elle s'applique quand le but est de la forme $\forall n : \mathbb{N}, P(n)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant
  $$C \vdash \forall n : \mathbb{N}, P(n) \text{ ou } C, n : \mathbb{N} \vdash P(n)$$
  par les deux objectifs
  $C \vdash P(0)$ et $C, n : \mathbb{N}, P(n) \vdash P(n+1)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple :
  "Raisonnons par récurrence sur n ..."

Appliquer et appliquer

On aura remarqué qu'on emploie le mot "appliquer" pour

- instancier une hypothèse
- invoquer et instancier une ressource
- utiliser une hypothèse ou une ressource pour réduire le but
- utiliser une hypothèse ou une ressource pour déduire du contexte
- utiliser une hypothèse ou une ressource pour réécrire, au but ou au contexte.
- et même parfois, on parle d'appliquer une définition..