Parties (suite)

Dédou

Février 2012

La réunion comme borne supérieure

La réunion de deux parties est leur borne supérieure

en ce sens que c'en est un majorant

$$\forall A, B : \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B$$

et que c'est le plus petit :

$$\forall A, B, C : \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \subset C \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C.$$

Exo corrigé

Prouver la première partie ...

La réunion comme borne supérieure

La réunion de deux parties est leur borne supérieure

en ce sens que c'en est un majorant

$$\forall A, B : \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B$$

et que c'est le plus petit :

$$\forall A, B, C : \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \subset C \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C.$$

Exo 1

Prouver la deuxième partie ...

L'intersection opère sur les parties

L'intersection des parties de $\mathbb{R}$ est une opération

dont la carte de visite est :

$$\begin{array}{rccc} \cap : & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ & (X, Y) & \mapsto & X \cap Y \end{array}$$

L'explicitation de l'intersection des parties

L'intersection des parties de E s'explicite comme suit

$$\forall A, B \subset \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Propriétés de l'opération d'intersection

L'intersection des parties a les propriétés suivantes

- elle est "commutative" : $\forall X\ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cap Y = Y \cap X$.
- elle est "associative" :
  $\forall X\ Y\ Z : \mathcal{P}(\mathbb{R}), (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.
- elle a un "neutre" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap X = X$.
- elle a un "absorbant" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$.

Et ça se démontre.

L'intersection comme borne inférieure

L'intersection de deux parties est leur borne inférieure

en ce sens que c'en est un minorant

$$\forall A, B : \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B$$

et que c'est le plus grand :

$$\forall A, B, C : \mathcal{P}(\mathbb{R}), C \subset A \text{ et } C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B.$$

Exo 2

Prouver la première partie ...

Le complémentaire des parties

Le complémentaire des parties de $\mathbb{R}$

a la carte de visite suivante :

$$\complement : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & \complement(X) \end{array}$$

L'explicitation du complémentaire

Le complémentaire s'explicite comme suit

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x \in \complement(A) \Leftrightarrow x \notin A.$$

Et ça se démontre.

Propriétés du complémentaire

L'opération de passage au complémentaire a les propriétés suivantes

- elle est "involutive" : $\forall X : \mathcal{P}(\mathbb{R}), \complement(\complement(X)) = X$.
- et donc elle est bijective
- elle est "décroissante" :
  $\forall X \ Y : \mathcal{P}(\mathbb{R}), X \subset Y \Leftrightarrow \complement(Y) \subset \complement(X)$.

Une caractérisation du complémentaire

Le complémentaire est caractérisé par la propriété suivante

$$\forall A : \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \cap \complement(A) = \emptyset \text{ et } A \cup \complement(A) = \mathbb{R}.$$

Complémentaire d'une réunion

Le complémentaire d'une réunion

c'est l'intersection des complémentaires.

Exo corrigé

Formaliser et prouver cette propriété.

Complémentaire d'une intersection

Le complémentaire d'une intersection

c'est la réunion des complémentaires.

Exo 3

Formaliser et prouver cette propriété.